27 Novembre 2000
Massimi e minimi vincolati

- Determinare le dimensioni del parallelepipedo di volume massimo con spigoli paralleli agli assi inscritto nell'elissoide
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$
- Determinare gli estremi della funzione $f(x,y) = (y - x^2)^3$ nella regione $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$
- Determinare gli estremi della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$ nel cerchio $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$
- Determinare gli estremi della funzione
$$f(x,y,z) = x^2 - x + y^2 + y(z + x - 1)$$
con i vincoli
$$\begin{cases} x^2 + y + 2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$
Prima con i moltiplicatori di Lagrange poi parametrizzando il vincolo.

Funzioni implicite

- Mostrare che l'equazione $1 + xy - \log(e^{xy} - e^{-xy}) = 0$ definisce in un intorno del punto con $x = 1$ una sola funzione $y = y(x)$ derivabile e tale che $y(1) = -\log(\sqrt{e - 1})$. Calcolare inoltre $y'(-1)$.
- Data l'equazione $2xe^y + y + 1 = 0$,
  - i) dimostrare che l'equazione definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ derivabile in un intorno del punto con $x = 0$ $(y = -1)$.
  - ii) determinare il dominio della funzione $y = y(x)$ definita al punto precedente.
- Verificare che $x^2 + 2x + e^y + y - 2z^3 = 0$ definisce, in un intorno del punto $P = (-1, 0, 0)$ una superficie di equazione $y = g(x, z)$.

  Scrivere l'equazione del piano tangente in P a tale superficie.
- Sia $F(x,y) = e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x + 1) + 1$. Dimostrare che $F(x,y) = 0$ definisce una funzione $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$ con $y(0) = -1$.

  Si dimostri che $x = 0$ è un minimo relativo per $y(x)$.
- L'equazione $x^4 - 2x^3 + y^2 = 0$, definisce implicitamente una curva del piano.

i) Studiare i punti singolari della curva

ii) Determinare i punti della curva con tangente verticale e con tangente orizzontale.

iii) Tracciare un grafico qualitativo della curva.

- Data la curva di equazione implicita $(x^2 + y^2)^2 - 2xy = 0$,

  i) Studiare la natura dell'origine (punto isolato? , cuspide?, nodo?)

  ii) Disegnare un grafico qualitativo della curva

  iii) Svolgere il punto ii) scrivendo l'equazione implicita in coordinate polari