Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e Edile
Analisi Matematica II e Probabilita'

Lezioni A.A. 2000/01 , prof. G. Stefani
9 Ottobre 2000 - 28 Gennaio 2001

1 Nona settimana

76. Lun. 4 Dic.
Generalita'. Spazi di probabilita' come modello matematico di eventi non deterministici, $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. Ω e' un insieme e rappresenta i possibili risultati di un esperimento, "gli eventi campione"; $\mathcal{A}$ e' una σ-algebra contenuta in 2^{Ω}(= insieme delle parti di Ω) e rappresenta gli eventi a cui si vuol assegnare una probabilita'; $p : \mathcal{A} \to [0, 1]$ e' una funzione σ-additiva ed e' la funzione di probabilita'.
77. Lun. 4 Dic.
Probabilita' nel discreto, esempi:

- lancio del dado: insieme dei campioni, spazio degli eventi, funzione probabilita'
- lancio di una moneta
- 2,3,.. lanci consecutivi di una moneta: insieme dei campioni, spazio degli eventi, funzione probabilita'
- estrazioni del lotto: insieme dei campioni, spazio degli eventi, funzione probabilita'
- lanci successivi di una moneta finche' non venga testa: insieme dei campioni, spazio degli eventi, funzione probabilita'
- probabilita' che venga testa in non piu' di tre lanci: due diversi modi di modellare il problema

78. Lun. 4 Dic.
Proprieta' della funzione di probabilita'
79 Mar. 5 Dic.
Principio di induzione, esempi: somma dei primi n numeri interi, cardinalita' di 2^{Ω}.
80. Mar. 5 Dic.
Calcolo combinatorio: cardinalita' di D^n_k, C^n_k. Esempi dal gioco del Lotto: probabilita' di una cinquina e di una cinquina secca, probabilita' del terno. Probabilita' che fra k persone ce ne siano due che hanno il compleanno lo stesso giorno.
Esercizi proposti: probabilita' di vincita al gioco del Lotto con un ambo e una quaterna. Probabilita' che fra k persone ce ne siano almeno due che hanno il compleanno un giorno assegnato, nell'ipotesi che tutte le date siano equiprobabili.
81. Gio. 7 Dic.
Esempi guida di probabilita' uniforme:

- N^k = collocamento di n simboli in k caselle (totocalcio) = k estrazioni con reimbussolamento di n oggetti (moneta, dado, roulette) = collocamento di k palle in n scatole (funzioni $f : K \to N$)
- D^n_k = estrazioni senza reinbussolamento (Lotto) = collocamento k palle in n scatole con non piu' di una palla per scatola (funzioni iniettive $f : K \to N$)
- C^n_k = estrazioni di k oggetti fra n (Tombola, Lotto)

Distribuzione ipergeometrica
82. Gio. 7 Dic.
Probabilita' condizionata: un esempio

2 Decima settimana

Lun. 11 Dic.
Prova intercorso
Lun. 11 Dic.
Prova intercorso
Lun. 11 Dic.
Prova intercorso
83. Mar. 12 Dic.
Probabilita' condizionale, indipendenza stocastica, formula di Bayes.
84. Mar. 12 Dic.
Correzione prova intercorso
85. Gio. 14 Dic.
Schema successo-insuccesso di Bernulli. Esercizi proposti:

- Applicazioni al gioco del Lotto: probabilita' di vincita giocando un terno su n ruote, per n settimane sulla stessa ruota.

86. Gio. 14 Dic.
Variabili aleatorie discrete, densita', distribuzioni. Esempi: densita' uniforme, binomiale (di Bernoulli), ipergeometrica
87. Ven. 15 Dic.
Densita' geometrica. Distribuzione di Poisson come approssimazione della distribuzione binomiale
88. Ven. 15 Dic.
Funzioni di ripartizione. Esempi: funzioni di ripartizione associate alla distribuzione uniforme, geometrica, binomiale.
89. Ven. 15 Dic.
Variabili aleatorie indipendenti: definizione, densita' congiunte e marginali.

3 Undicesima settimana

90. Lun. 18 Dic.
Esempi di v.a. indipendenti:

- X_c = pesco cuori e X_a = pesco un asso con un mazzo di 52 carte (quattro semi) e con uno di 54 (quatto semi piu' due Jolly).
- Processo di Bernulli di n prove indipendenti e distribuzione binomiale
- Processo di Bernulli di un numero illimitato di prove indipendenti e distribuzione geometrica e geometrica traslata.

91. Lun. 18 Dic.
Media (valore atteso, speranza matematica) di una v.a. Esempio: scommesse eque. Proprieta' della media: linearita', monotonia, continuita'. Esempio: media della distribuzione binomiale.
92. Lun. 18 Dic.
Media del prodotto di v.a. indipendenti. Definizione di Varianza e Deviazione standard.
93. Mar. 19 Dic.
Proprieta' della varianza, alcune dimostrate altre date per esercizio. Esempio: varianza della distribuzione binomiale.
94. Mar. 19 Dic.
Covarianza di due v.a. Coefficiente di correlazione e sue limitazioni. Disuguaglianza di Chebichev, senza dimostrazione.
95. Gio. 21 Dic.
Lezione tenuta dal Dott. Mugelli: esercizi sulla distribuzione ipergeometrica, calcolo di Speranza matematica e varianza per il lancio di un dado con n facce e per il lancio di k dadi con n facce.

96. Gio. 21 Dic.
Lezione tenuta dal Dott. Mugelli: dimostrazione che la distribuzione di Poisson e' il limite uniforme delle binomiali, dimostrazione che la somma di due distribuzioni di Poisson e' ancora una distribuzione di Poisson, calcolo di media e varianza di una distribuzione di Poisson.

4 Dodicesima settimana

97. Lun. 8 Gen.
Spazi di probabilita' continui: cenni. Dimostrazione di

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2/2) = \sqrt{2\pi}$$

Esempio: Si da una spinta alla lancetta di un orologio e si chiede di calcolare la probabilita' che la lancetta si fermi in un determinato settore, supponendo che le parti dell'orologio siano equiprobabili. si dimostra che la probabilita' che la lancetta si fermi in un punto esatto dell'orologio deve essere 0. Un modello ragionevole risulta l'intervallo $[0, 2\pi)$ con una "probabilita' uniforme".
98. Lun. 8 Gen.
Esempio. (ago di Buffon). Un ago di lunghezza unitaria viene gettato a caso su un piano su cui si sono disegnate rette parallele a distanza unitaria. Si suppone che le parti del piano siano equiprobabili e si chiede che probabilita' ci sia che l'ago attraversi una delle rette. Un modello per i possibili risultati consiste nel fissare l'asse delle ascisse ortogonale alle rette, fissare la striscia individuata dalle rette $x = 0$, $x = 1$ dare l'ascissa x del centro dell'ago e l'angolo y che l'ago forma con l'asse delle x. Lo spazio dei campioni risulta cosi' il rettangolo $[0, 1] \times [-\pi/2, \pi/2)$, con una "probabilita' uniforme". L'evento $A = \{\text{l'ago incontra una retta}\}$ e' rappresentato da $\{(x, y) : \cos(y)/2 > x > 1 - \cos(y)\}$. Esercizio proposto: calcolare $p(A)$.
99. Lun. 8 Gen.
Variabili aleatorie continue: definizione tramite la funzione di ripartizione, v.a. con densita' integrabile secondo Riemann, analogie e differenze con le v.a. discrete, relazione fra funzione di ripartizione e densita'. Esempi:

1. Densita' uniforme su un intervallo
2. Densita' normale standard
3. Desita' esponenziale
4. Densita' di Cauchy (per esercizio): determinare per quale valore di p, la funzione $p/(1 + x^2)$ rappresenta una densita' continua

Esercizio proposto: disegnare le funzioni di ripartizione delle v.a. definite dalle precedenti densita' e, quando possibile determinarle.
Densita' congiunte e densita' marginali, definizione di v.a. indipendenti.
100. Mar. 9 Gen.
Data la densita' congiunta, ricavare le densita' marginali. Esempio: densita' uniforme sul cerchio unitario. Densita' della traslazione e della riparametrizzazone.
101. Mar. 9 Gen.
Definizione di media di una v.a., esempi: densita' uniforme e normale standard. Proprita' della media: linearita', monotonia, continuita', media del prodotto di v.a. indipendenti.
102. Gio. 11 Gen.
Varianza di una v.a., esempi: densita' uniforme e normale standard. Proprieta' della varianza, scarto quadratico medio, covarianza, coefficiente di correlazione.
Esercizi proposti: calcolare media varianza e scarto quadratico medio delle densita' esponenziali e di Cauchy.
103. Gio. 11 Gen.

Densita' normali. Disuguaglianza di Chebichev.
104. Ven. 12 Gen.
Lezione tenuta dal Dott. Mugelli: esercizi su densita' congiunte e marginali, densita' della somma e del prodotto.
105. Ven. 12 Gen.
Lezione tenuta dal Dott. Mugelli: esercizi su varianza, covarianza e coefficiente di correlazione.
106. Ven. 12 Gen.
Lezione tenuta dal Dott. Mugelli: esercizi su leggi Γ.

5 Tredicesima settimana

107. Lun. 15 Gen.
Convergenza di variabili aleatorie: definizioni di convergenza quasi certamente, in prebabilita' e in legge. Legge dei grandi numeri per v.a. indipendenti con la stessa densita' in presenza di valore atteso e varianza
108. Lun. 15 Gen.
Dimostrazione della convergenza in probabilita'. Significato della legge e sue limitazioni.
109. Lun. 15 Gen.
Esempio: $p(B(2n, 1/2) = n) \to 0$.
110. Mar. 16 Gen.
Convergenza in legge: teorema del limite centrale (senza dimostrazione) e suo significato. Esercizio proposto: dimostrare, nelle ipotesi del teorema del limite centrale, che

$$\frac{X_1 + .. + X_n - n\mu}{\sqrt{n}} \to N(0, \sigma^2)$$

111. Mar. 16 Gen.
Relazione fra il teorema del limite centrale e la legge dei grandi numeri. Approssimazione normale: significato e calcolo delle probabilita'

$$p(|X_1 + .. + X_n - n\mu| < \epsilon),\ p(|X_1 + .. + X_n - n\mu| > \epsilon)$$

$$p(|X_1 + .. + X_n - n\mu| < c\sqrt{n}),\ p(|X_1 + .. + X_n - n\mu| > c\sqrt{n})$$

in termini della funzione $\Phi :=$ funzione di ripartizione di $N(0, 1)$
112. Gio. 18 Gen.
Data una v.a. continua di densita' uniforme in $[0, 1]$, simulare un'assegnata v.a. Y di densita' f_X. Esempio: simulare Y di legge esponenziale.
113. Gio. 18 Gen.
Esercizio: date $X_1, .., X_n \sim X \sim N(0, \sigma^2)$, indipendenti, determinare la densita' di X^2 e quella di $\chi^2(n) \sim X_1^2 + .. + X_n^2$, sapendo che se le v.a. sono indipendenti

$$\Gamma(\alpha_1, \lambda) + .. + \Gamma(\alpha_n, \lambda) = \Gamma(\alpha_1 + .. + \alpha_n, \lambda).$$

114. Ven. 19 Gen.
Statistica descrittiva: retta di regressione, criterio dei minimi quadrati.
115. Ven. 19 Gen.
Significato del coefficiente di correlazione, residui, errore standard della stima.
116. Ven. 19 Gen.
Esercizio proposto: Siano $X, Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ v.a. indipendenti, calcolare la densita' di $X+Y$. Ripetere l'esercizio quando $X \sim N(0, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(0, \sigma_2^2)$ e dedurne la formula per $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

6 Quattordicesima settimana

117. Lun. 15 Gen.
Lezione tenuta dal Dott. Mugelli: esercizi di ricapitolazione.
118. Lun. 15 Gen.
Lezione tenuta dal Dott. Mugelli: esercizi di ricapitolazione..
119. Lun. 15 Gen.
Lezione tenuta dal Dott. Mugelli: esercizi di ricapitolazione..
120. Mar. 16 Gen.
Lezione tenuta dal Dott. Mugelli: esercizi di ricapitolazione..
121. Mar. 16 Gen.
Lezione tenuta dal Dott. Mugelli: esercizi di ricapitolazione..