# Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e Edile

# Esercizi di Calcolo delle Probabilita' 3/1/01

1. Calcolare media, varianza e deviazione standard della densita' geometrica di parametro $p$, si ricorda che la densita' geometrica vale $p_X(k) = p(1-p)^k$.
   **Suggerimento:** Nel calcolo della somma delle serie si considerino le proprieta' delle serie di Taylor e il fatto che $k^2 = k(k-1) + k$

2. Calcolare covarianza e coefficiente di correlazione delle seguenti coppie di v.a. che si suppongono a media e varianza finita $(X, X)$ , $(X, -X)$ , $(X, aX + b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Da un mazzo di 40 carte si pescano successivamente due carte, senza rimettere nel mazzo la prima carta. Indichiamo con $X_i,\ i = 1, 2$ la v.a. che assume il valore 1 se si pesca cuori la $i$-esima volta.
   a) Calcolare la probabilita' marginale, media, varianza e deviazione standard di ciascuna delle $X_i$.
   b) Calcolare la probabilita' congiunta, la covarianza e il coefficiente di correlazione di $X_1,\ X_2$.
   c) Calcolare la media e la varianza di $X_1 + X_2$.
   **Suggerimento:** a) Si verifichi che
   $$p(X_1 = x) = p(X_2 = x), \quad x = 0, 1$$

4. Ripetere il precedente esercizio con un mazzo di 52 carte.

5. Si distribuisce un mazzo di 40 carte e si indica con $X_i,\ i = 1, 2, .., 40$ la v.a. che assume il valore 1 se si ha cuori nella $i$-esima carta (si tratta di 40 prove dipendenti di un esperimento di Bernulli).
   a) Calcolare la probabilita' marginale, media, varianza e deviazione standard di ciascuna delle $X_1, X_2, X_3$.
   b) Verificare il fatto intuitivo che la probabilita' marginale di ciascuna delle $X_i$ coincide con quella di $X_1$ e che la probabilita' congiunta di $X_i,\ X_j,\ i \neq j$, coincide con quella di $X_1,\ X_2$, vedi anche es.3.
   c) Calcolare la probabilita' congiunta, la covarianza e il coefficiente di correlazione di $X_i,\ X_j$, $i \neq j$. Calcolare la media e la varianza di $X_i + X_j$, $i \neq j$, vedi anche es.3.
   **Suggerimento:** b) Basta dimostrare che se $1 < n < 40$
   $$p\left(X_{n+1} = x \,|\, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}\right) = p\left(X_n = x, |\, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}\right).$$
   La probabilita' di $X_1$ e' $m = 10$ su $n = 40$, tutte le volte che si distribuisce una carta, $n$ diminuisce di 1, se la carta e' cuori, cioe' il valore della v.a. e' 1, anche $m$ diminuisce di 1. Quindi
   $$p\Big(X_n = 1 \,|\, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}\Big) = \Big(10 - \sum_1^{n-1} x_i\Big)/(41-n)$$
   $$p\Big(X_n = 0 \,|\, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}\Big) = \Big(31 - n + \sum_1^{n-1} x_i\Big))/(41-n)$$
   $$p\Big(X_{n+1} = 1 \,|\, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}\Big) =$$
   $$= p\Big(X_{n+1} = 1 \,|\, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = 0\Big) +$$
   $$+ p\Big(X_{n+1} = 1 \,|\, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = 1\Big)$$
   $$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

6. Si distribuisce un mazzo di 40 carte fra quattro persone e si indica con $X_i,\ i = 1, 2, .., 10$, la v.a. che assume il valore 1 se si ha cuori nella $i$-esima carta del maziere (del primo, secondo terzo giocatore).
   a) Calcolare la probabilita' marginale, media, varianza e deviazione standard di ciascuna delle $X_i$, e la probabilita' congiunta di $X_i,\ X_j,\ i \neq j$.
   b) Calcolare la probabilita' che il maziere abbia 10 carte di cuori (vedi anche es.4 del Dott. Mugelli)
   c) Calcolare la probabilita' che il maziere abbia 10 carte dello stesso seme (vedi anche es.4 del Dott. Mugelli)
   **Suggerimento:** a) Ricondursi all'esercizio precedente.
   b) La v.a. che descrive il problema e' $Y = X_1 + ... + X_{10}$, che e' una v.a. ipergeometrica $G(k; 10, 10 + 30)$, si tratta di calcolare $G(10; 10, 10 + 30)$.
   c) Poiche' avere 10 carte di cuori e' un evento disgiunto da avere 10 carte di picche etc.., otterremo la probabilta' come $4G(10; 10, 10 + 30)$.

7. Ripetere gli esercizi precedenti con un mazzo di 52 carte

8. Nel gioco del Bridge una linea di gioco, diciamo giocatori A e B, ha due picche. Calcolare la probabilita' che A abbia $0, 1, 2$ picche (vedi anche es.1 del Dott. Mugelli).
   **Suggerimento:** Nella linea si hanno 26 carte di cui 2 picche, si tratta di vedere le possibilita' di avere le picche scegliendo a caso 13 carte su 26. Si deve cioe' calcolare la densita' ipergeometrica $G(k; 13, 2 + 24)$, per $k = 0, 1, 2$.

9. Nel gioco del Bridge una linea di gioco, diciamo giocatori A e B, ha sei fiori.
   a) Calcolare la probabilita' che A abbia 3 fiori (vedi anche es.2 del Dott. Mugelli).
   b) Sapendo che A ha la Donna, calcolare la probabilita' che sia seconda.
   **Suggerimento:** a) Analogamente all'esercizio precedente si deve calcolare la densita' ipergeometrica $G(3; 13, 6 + 20)$.
   b) Si tratta di calcolare la probabilita' di avere una fiori su 12 carte scelte tra 25 di cui 5 fiori.

10. Ripetere gli esercizi precedenti per il gioco del Tressette, cioe' con un mazzo di 40 carte (vedi anche es.3 del Dott. Mugelli). Vedere come variano le probabilita' in funzione del numero $4n$ di carte.

11. Da un'urna contenente 13 palline bianche, 13 palline rosse, 13 palline gialle e 13 palline verdi, si estraggono 13 palline. Calcolare la probabilita' di estrarre 4 palline bianche, 5 palline rosse, 2 palline gialle e 2 palline verdi (vedi anche es.5 del Dott. Mugelli).
    **Suggerimento:** Si tratta di calcolare come si possono estrarre 4 palline bianche su 13, 5 palline rosse su 13, 2 palline gialle su 13, 2 palline verdi su 13, su le possibilita' totali di estrazione di 13 palline su 52.

12. In un'urna sono contenute $n > 5$ palline numerate da 1 a $n$. Si estraggono tutte le palline e un giocatore punta alla pari che le palline 1 e 5 vengano estratte consecutivamente. Per quali valori di $n$ il gioco e' equo? (vedi anche es.6 del Dott. Mugelli).
    **Suggerimento:** Le possibili estrazioni sono $n!$. Fissata la posizione di 1 e 5, mediante la posizione di 1, si tratta di calcolare come si possono estrarre le rimanenti $n - 2$ palline ( sono $(n - 2)!$ ) e poi di valutare le possibili posizioni di 1, che sono $(n - 1)$.
    Si noti che nel caso del mazzo di carte se si punta sui valori, il numero delle possibili posizioni va moltiplicato per 4, numero dei semi.

13. Due urne contengono ciascuna 7 elementi denotati $a_1, ..., a_7$. Da ogni urna si estraggono 3 elementi, calcolare la probabilita' di non avere elementi comuni fra le due estrazioni. Calcolare la probabilita' di avere elementi $1, 2, 3$ elementi comuni fra le due estrazioni.

14. Un mazzo di 52 $(40, 2n)$ carte viene distribuito. Calcolare la probabilita' che la prima e l'ultima carta abbiano lo stesso colore, siano rosse, siano di colori diversi.
    **Suggerimento:** Tenere conto dell'esercizio 5.

15. Da un mazzo di 52 $(40, 2n)$ si toglie una carta rossa e si distribuisce. Calcolare la probabilita' che la prima e l'ultima carta siano rosse, siano nere, abbiano lo stesso colore, siano di colori diversi.

16. Un'urna contiene 5 palline rosse e 3 bianche.
a) Si lancia una volta un dado e si estrae un numero di palline pari al risultato. Calcolare la probabilita' di estrarre solo 3 palline rosse, che fra le palline estratte ce ne siano esattamente (almeno, al piu') 3 rosse.
b) Si lancia due volta il dado e si estrae ogni volta un numero di palline pari al risultato. Calcolare la probabilita' di estrarre solo palline rosse, che fra le palline estratte ce ne siano esattamente (almeno, al piu') 3 rosse.

17. Si fanno tre lanci successivi di un dado, calcolare la probabilita' che escano tre risultati uguali.

18. In una estrazione con reimbussolamento di 9 oggetti su 20 si punta sull'uscita di 4 oggetti fissati. Quanto deve essere la quota concessa dal "banco" perche' il gioco sia equo?

19. In un negozio si vendono computer di tre marche diverse, chiamate A,B,C, in percentuali del $20, 30, 40\%$ rispettivamente. Le percentuali di computer non funzionati per le tre marche e' rispettivamente del $10, 4, 1\%$. Calcolare la probabilita' che un computer (non) funzionante venduto nel negozio sia stato prodotto dalla marca A (B,C,).