Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e Edile

Esercizi di Calcolo delle Probabilita' 20/12/00

1 Esercizio

Un test a risposta multipla consiste in 11 domande ciascuna delle quali ha 4 risposte di cui una giusta e 3 errate. Ogni domanda deve avere al piu' una risposta. A ciascuna risposta giusta si attribuisce il punteggio 3 a ciascuna risposta sbagliata il punteggio -1 a ciascuna domanda non risposta il punteggio 0. Calcolare:

1. Il valore atteso del punteggio su ogni domanda e globale.
   soluzione 1
2. La probabilita' di avere un punteggio di almeno 18 scegliendo tutte le risposte a caso.
   soluzione 2
3. La probabilita' di aumentare il punteggio dando a caso $m(< 11)$ risposte. Studiare la probabilita' in funzione di m.
   soluzione 3
4. Nel caso che per una domanda si sia certi che la risposta giusta sia da scegliere fra due, che probabilita' si ha di aumentare il punteggio scegliendola a caso fra quelle due?
   soluzione 4
5. Nel caso che per m domande si sia certi che la risposta giusta sia da scegliere fra due, che probabilita' si ha di aumentare il punteggio scegliendola a caso? Studiare tale probabilita' in funzione di m. **soluzione 5**
6. Se il punteggio di un test e' 18 che probabilita' si ha di aver dato almeno k risposte giuste? E al piu' h risposte sbagliate? Studiare le probabilita' in funzione di h, k.
   soluzione 6
7. Ripetere il precedente esercizio per diversi punteggi del test, ad esempio $33, 29, 17, 16, 5$
   soluzione 7

2 Soluzione

Il problema puo' essere schematizzato pensando ad $n = 11$ copie indipendenti dello spazio di probabilita' formato da una domanda. Poiche' non dare risposta contribuisce solo a determinare il numero di domande che entrano effettivamente in "gioco", i possibili esiti (risposte) Ω possono essere schematizzati con
g=risposta giusta con probabilita' 1/4
e=risposta errata con probabilita' 3/4
*=nessuna risposta con probabilita' 0.
Il punteggio di ciascuna domanda puo' essere visto come la variabile aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da $X(g) = 3, X(e) = -1, X(*) = 0$. Definendo per $i = 1, .., n$,

$$X_i : \Omega^n \to \mathbb{R} \qquad X_i(\omega_1, ..., \omega_n) = X(\omega_i),$$

si ottiene il punteggio globale come somma di variabili aleatorie indipendenti $Y = X_1 + ... + X_n$. Si possono anche introdurre le variabili aleatorie $X_g, X_e, X_* : \Omega^n \to \mathbb{R}$ come quelle che contano il numero di risposte giuste, errate e non date rispettivamente.

Domanda 1. *Calcolare il valore atteso del punteggio su ogni domanda e globale.*

Soluzione
$E[X] = 3/4(-1) + 3/4 = 0$, quindi $E[Y] = n.0 = 0$. Il "gioco" e' equo.
Riflettere su quali altri punteggi si possono dare se si vuole far rimanere il valore atteso di Y uguale a 0.

Domanda 2. *Calcolare la probabilita' di avere un punteggio di almeno 18 scegliendo tutte le risposte a caso.*

Soluzione
In questo caso si ipotizza di dare tutte le risposte, quindi lo spazio di probabilita' puo' essere visto come una distribuzione binomiale $B(11, 3/4)$ (considerando e=successo!!) e si deve calcolare

$$p(Y \geq 18).$$

Si puo' definire una partizione di Ω con

$$A_i = \{X_e = i = \textit{numero di risposte sbagliate}\}, \quad i = 0, ..., n;$$

se $\omega \in A_i$ allora $p(\omega) = \frac{3^i}{4^{11}}$, e

$$Y(\omega) = -i + 3(11 - i) = -4i + 33 \geq 18 \Longrightarrow i \leq [15/4] = 3.$$

D'altra parte la cardinalita' di A_i e' data da $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$ e quindi

$$p(Y \geq 18) = \sum_{i=0}^{3} p(\{Y \geq 18\} \cap A_i) = \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{4^{11}} 3^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{3} \frac{11...(11 - i + 1)3^i}{i!4^{11}} = \frac{4984}{4^{11}} = 0.00118..$$

Domanda 3. *Calcolare la probabilita' di aumentare il punteggio dando a caso* $m(< 11)$ *risposte. Studiare la probabilita' in funzione di* m.

Soluzione
Si deve calcolare la probabilita' condizionata

$$p(Y \geq 0 | X_g + X_e = m) = p(Y \geq 0 | X_* = 11 - m).$$

Si puo' ragionare in maniera analoga al punto precedente sostituendo m a n, oppure in maniera equivalente definendo $A_i = \{X_e = i, X_g = m - i\}, \quad i = 0, ..., m$; in ogni caso se $\omega \in A_i$ allora $p(\omega) = \frac{3^i}{4^{11}}$ e

$$Y(\omega) = -i + 3(m - i) = -4i + 3m > 0 \Longrightarrow i \leq 3m/4.$$

Se si indica k il piu' grande intero minore di $3m/4$, otteniamo

$$p_m := p(\{Y \geq 0\} | \{X_g + X_e = m\}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{4^m} 3^i \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}.$$

In particolare avremo

$$p_1 = \frac{1}{4} \quad p_2 = \frac{7}{16}.$$

Per studiare p_m, conviene studiare il complementare, infatti si vede subito che gli esiti che danno un punteggio negativo sono in numero minore di quelli che danno un esito positivo. $Y(\omega) = -i + 3(m - i) = -4i + 3m \leq 0$ implica $i \geq 3m/4$. Se si indica k il piu' piccolo intero minore o uguale a $3m/4$, otteniamo $k = m$ se $3m/4 > m - 1$, inoltre $k = m - 1$ se $3m/4 > m - 2$. Procedendo in maniera analoga otteniamo

$$\begin{aligned} k = m &\iff m \leq 3 \\ k = m - 1 &\iff 4 \leq m \leq 4 \\ k = m - 2 &\iff 5 \leq m \leq 7 \\ k = m - 3 &\iff 9 \leq m \leq 10, \end{aligned}$$

per l'ultima limitazione si ricordi che si richiede $m < 11$. Ponendo

$$B_1 = \{1, .., 3\} \quad B_2 = \{5, .., 7\} \quad B_3 = \{8, 9, 10\}$$

abbiamo

$$m \in B_1 \quad p_m = 1 - \frac{1}{4^m} 3^m = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^m$$

$$m \in B_2 \quad p_m = \sum_{i=m-1}^{m} \frac{1}{4^m} 3^i \left(\begin{array}{c} m \\ i \end{array} \right) = 1 - \frac{m 3^{m-1} + 3^m}{4^m}$$

$$m \in B_3 \quad p_m = \sum_{i=m-2}^{m} \frac{1}{4^m} 3^i \left(\begin{array}{c} m \\ i \end{array} \right) = 1 - \frac{m(m-1)3^{m-2}/2 + m 3^{m-1} + 3^m}{4^m}$$

Si vede quindi che $m \mapsto p_m, \ m \in B_i$ e' crescente, mentre $p_3 < p_4, \ p_7 < p_8$.
Il grafico e' dato da

$$(1, 0.25) \ , \ (2, 0.4375) \ , \ (3, 0.578125)$$

$$(4, 0.26171875) \ , \ (5, 0.3671875) \ , \ (6, 0.4660644531) \ , \ (7, 0.5550537109)$$

$$(8, 0.3214569092) \ , \ (9, 0.3993225098) \ , \ (10, 0.474407196).$$

Disegnarlo in un sistema di assi cartesiani.

Domanda 4. *Nel caso che per una domanda si sia certi che la risposta giusta sia da scegliere fra due, che probabilita' si ha di aumentare il punteggio scegliendola a caso fra quelle due?*

Soluzione
La probabilita' e' ovviamente 1/2.

Domanda 5. *Nel caso che per m domande si sia certi che la risposta giusta sia da scegliere fra due, che probabilita' si ha di aumentare il punteggio scegliendola per ognuna delle m domande a caso? Studiare tale probabilita' in funzione di m.*

Soluzione
L'esercizio e' simile al n.3, cambia solo la probabilita' da attribuire alle risposte. Pertanto con le stesse notazioni avremo:

$$m \in B_1 \quad p_m = 1 - \frac{1}{2^m}$$

$$m \in B_2 \quad p_m = \sum_{i=m-1}^{m} \frac{1}{2^m} \left(\begin{array}{c} m \\ i \end{array} \right) = 1 - \frac{m+1}{2^m}$$

$$m \in B_3 \quad p_m = \sum_{i=m-2}^{m} \frac{1}{2^m} \left(\begin{array}{c} m \\ i \end{array} \right) = 1 - \frac{m^2 + m + 2}{2^{m+1}}$$

Si vede quindi che $m \mapsto p_m, \ m \in B_i$ e' crescente, mentre $p_4 < p_5, \ p_8 < p_9$.
Disegnare il grafico.

Domanda 6. *Se il punteggio di un test e' 18 che probabilita' si ha di aver dato almeno k risposte giuste? E al piu' h risposte sbagliate? Studiare le probabilita' in funzione di h, k.*

Soluzione
Si tratta di calcolare le due probabilita' condizionate

$$p(X_g \geq k | Y = 18)$$
$$p(X_e \leq h | Y = 18).$$

Ponendo

$$A_{ij} = \{X_g = j\} \cup \{X_e = i\} \ , \ i, j \geq 0 \ , \ i + j \leq 11,$$

abbiamo che

$$\omega \in \{Y = 18\} \cap A_{ij} \implies Y(\omega) = -i + j = 18 \ , \ p(\omega) = \frac{3^i}{4^{i+j}}.$$

D'altra parte $A_{ij} \cap \{Y = 18\} \neq$ se esolo se $18 - 3j \geq 0$ e $4j \leq 29$, quindi per la coppia (i, j) abbiamo solo le possibilita'

$$(i, j) = (0, 6) \ , \ (i, j) = (3, 7).$$

Avremo

$$\begin{aligned} p(\{X_g = k\} \cap \{Y = 18\}) &= 0 \ , \ k \leq 5 \ , \ k \geq 8 \\ p(\{X_e = h\} \cap \{Y = 18\}) &= 0 \ , \ h \neq 0, 3 \\ p(\{X_g = 6\} \cap \{Y = 18\}) = p(\{X_e = 0\} \cap \{Y = 18\}) &= \binom{11}{6} \frac{1}{4^6} \\ p(\{X_g = 7\} \cap \{Y = 18\}) = p(\{X_e = 3\} \cap \{Y = 18\}) &= \frac{11!}{7!3!} \frac{3^3}{4^{10}} \end{aligned}$$

Le probabilita' richieste valgono

$$p(\{X_g \geq k\} \cap \{Y = 18\}) = \begin{cases} 1 & se \quad k \leq 6 \\ 0 & se \quad k \geq 8 \\ \frac{1}{1 + \frac{4^4 14}{6!9}} & se \quad k = 7 \end{cases}$$

$$p(\{X_e \leq h\} \cap \{Y = 18\}) = \begin{cases} 1 & se \quad h \geq 3 \\ \frac{1}{1 + \frac{6!9}{4^4 14}} & se \quad h = 0, 1, 2 \end{cases}$$

Domanda 7. *Ripetere il precedente esercizio per diversi punteggi del test, ad esempio* $33, 29, 17, 16, 5$

Soluzione
Ripetendo il ragionamento precedente si vede che per $Y = 33, 29, 16$, si hanno le sole possibilita'

$$(i, j) = (0, 11), (1, 10), (2, 6)$$

rispettivamente e le probabilita' possono valere solo 1 o 0.
Per $Y = 17$, le possibilita' sono

$$(i, j) = (1, 6), (4, 7).$$

Per $Y = 5$, le possibilita' sono

$$(i, j) = (1, 2), (4, 3), (7, 4).$$