Analisi Matematica II e Calcolo delle probabilita' - C.d.L. Civile ed Edile
Prova orale A del 3/02/01. Durata: ore 2

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte. Risposte senza giustificazione non verranno ritenute valide.
Per superare la prova orale e' necessario rispondere a qualche quesito in ciascuno dei tre esercizi.

ES.1 (tempo consigliato : 45 minuti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 - y^2$

a. Disegnare le linee di livello di f.

b. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f ristretta alla curva $x^2/4+y^2/9 = 1$ e calcolarli col metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Enunciare il teorema in $\mathbb{R}^2$ e darne una illustrazione geometrica nel caso attuale. Dimostrare il teorema enunciato.

c. Calcolare la derivata di f in direzione del vettore $v = (1, 3)$ nel punto $P = (1, 1)$.

d. Sia $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (e^t, t)$, calcolare la derivata di $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, nel punto $t = 1$, e la matrice Jacobiana di $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, nel punto $P = (1, 1)$.

e. Calcolare il piano tangente al grafico $z = f(x, y)$ nel punto $P = (1, -2, -3)$.

f. In quali punti di quali linee di livello di f non si puo' applicare il teorema della funzione implicita?

ES.2 (tempo consigliato : 30 minuti) Considerare la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{2^{nx}}{1 + e^{nx}}$$

a. Studiare la convergenza puntuale e disegnare il grafico della funzione limite.

b. La successione converge uniformemente in $[-1, 1]$? e in $[1, 2]$?

c. Determinare gli intervalli in cui la successione converge uniformemente.

d. Determinare gli intervalli $[a, b]$ per cui posso affermare

$$\lim_n \int_a^b \frac{2^{nx}}{1 + e^{nx}} dx \ = 0$$

e. Definire il significato di: la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge a $+\infty$.

ES.3 (tempo consigliato : 45 minuti) Sia X una variabile aleatoria di densita' concentrata in $[1, 4]$ e di legge $f(x) = ax + b$.

a. Determinare (a, b) in maniera che la media di X sia 2 e disegnare il grafico della funzione densita' e della funzione di ripartizione. Calcolare la varianza di X.

b. Sia $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una successione di v.a. con la stessa densita' di X, definiamo

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - 2n}{\sqrt{n}}.$$

Usando il teorema del limite centrale, calcolare la densita' della v.a. Y a cui converge in legge la successione Y_n.

c. Cosa significa che Y_n converge in legge a Y?

d. Detta $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la funzione di ripartizione di $N(0,1)$ (normale standard), usando l'approssimazione normale, calcolare

$$p(\sum_{i=1}^{1000} X_i \in [1970, 2030])$$

in termini di ϕ.

e. Sia Z una variabile aleatoria con la stessa legge di X e da questa indipendente, calcolare la probabilita' che la coppia (X, Z) disti dal punto $(2, 2)$ meno di 1.

Analisi Matematica II e Calcolo delle probabilita' - C.d.L. Civile ed Edile
Prova orale B del 1/02/01. Durata: ore 2

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte. Risposte senza giustificazione non verranno ritenute valide.
Per superare la prova orale e' necessario rispondere a qualche quesito in ciascuno dei tre esercizi.

ES.1 (tempo consigliato : 45 minuti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 - y$

a. Disegnare le linee di livello di f.

b. Giustificare l'esistenza di massimo e minimo di f ristretta alla curva $x^2/16+y^2/4 = 1$ e calcolarli col metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Enunciare il teorema in $\mathbb{R}^2$ e darne una illustrazione geometrica nel caso attuale. Dimostrare il teorema enunciato.

c. Calcolare la derivata di f in direzione del vettore $v = (-1, 3)$ nel punto $P = (1, 2)$.

d. Sia $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t, e^t)$, calcolare la derivata di $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, nel punto $t = 1$, e la matrice Jacobiana di $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, nel punto $P = (1, 2)$.

e. Calcolare il piano tangente al grafico $z = f(x, y)$ nel punto $P = (1, -2, 3)$.

f. In quali punti di quali linee di livello di f non si puo' applicare il teorema della funzione implicita?

ES.2 (tempo consigliato : 30 minuti) Considerare la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + 4^{-nx}}$$

a. Studiare la convergenza puntuale e disegnare la funzione limite.

b. La successione converge uniformemente in $[-1, 1]$? e in $[1, 2]$?

c. Determinare gli intervalli in cui la successione converge uniformemente.

d. Determinare gli intervalli $[a, b]$ per cui posso affermare

$$\lim_n \int_a^b \frac{e^{-nx}}{1 + 4^{-nx}} dx \ = 0$$

e. Definire il significato di: la serie numerica $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge .

ES.3 (tempo consigliato : 45 minuti) Sia X una variabile aleatoria di densita' concentrata in $[-1, 3]$ e di legge $f(x) = ax + b$.

a. Determinare (a, b) in maniera che la media di X sia $1/2$ e disegnare il grafico della funzione densita' e della funzione di ripartizione. Calcolare la varianza di X.

b. Sia $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una successione di v.a. con la stessa densita' di X, definiamo

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n/2}{\sqrt{n}}.$$

Usando il teorema del limite centrale, calcolare la densita' della v.a. Y a cui converge in legge la successione Y_n.

c. Cosa significa che Y_n converge in legge a Y?

d. Detta $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la funzione di ripartizione di $N(0,1)$ (normale standard), usando l'approssimazione normale, calcolare

$$p(\sum_{i=1}^{4000} X_i \in [1970, 2030]),$$

in termini di ϕ.

e. Sia Z una variabile aleatoria con la stessa legge di X e da questa indipendente, calcolare la probabilita' che la coppia (X, Z) disti dal punto $(1/2, 1/2)$ meno di 3.