Analisi Matematica II e Calcolo delle probabilita' - C.d.L. Civile ed Edile
Prova orale A del 1/02/01. Durata: ore 2

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte. Risposte senza giustificazione non verranno ritenute valide.
Per superare la prova orale e' necessario rispondere a qualche quesito in ciascuno dei tre esercizi.

ES.1 (tempo consigliato : 45 minuti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Determinare l'insieme in cui f e' differenziabile.

b. Discutere la limitatezza e l'esistenza di massimo e minimo globali (si consiglia di passare in coordinate polari).

c. Calcolare la derivata di f in direzione del vettore $v = (1,3)$ nel punto $P = (1,1)$.

d. Sia $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t, t^2)$, calcolare la derivata di $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, nel punto $t = 1$, e la matrice Jacobiana di $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, nel punto $P = (1,1)$.

e. Calcolare la retta tangente alla curva di livello $f(x,y) = 0$ nel punto $P = (1,1)$.

f. Enunciare il teorema della funzione implicita per la curva di livello $f(x,y) = 0$ nel punto $P = (1,1)$ e dedurne il grafico vicino a $P = (1,1)$.

g. Quali sono i punti di $f(x,y) = 0$ in cui non si puo' applicare il teorema della funzione implicita?

ES.2 (tempo consigliato : 30 minuti) Considerare la serie di potenze

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(x-7)^n}{2^n n}$$

a. Calcolare il raggio di convergenza

b. Determinarne l'intervallo in cui la serie converge puntualmente.

c. La serie converge uniformemente in $[6,8]$?

d. Determinare gli intervalli in cui la serie converge uniformemente.

e. Definire il raggio di convergenza.

f. Calcolare la somma della serie, specificando l'insieme su cui l'uguaglianza e' verificata.

ES.3 (tempo consigliato : 45 minuti) Sia X una variabile aleatoria normale di media 7 e varianza 9.

a. Disegnare il grafico della funzione densita' e della funzione di ripartizione di X e definire la funzione di ripartizione in termini di probabilita' e di densita'.

b. Detta $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la funzione di ripartizione di $N(0,1)$ (normale standard), calcolare $p(X \in [-3,3])$ in termini di ϕ.

c. Sia Y una variabile aleatoria con la stessa legge di X e da questa indipendente, calcolare la probabilita' che la coppia (X,Y) disti dal punto $(7,7)$ meno di 1.

d. Enunciare il teorema del limite centrale e, usando l'approssimazione normale, calcolare la probabilita' che su 10^4 lanci di una moneta equilibrata escano un numero di teste comprese fra 4000 e 6000, esprimendola mediante ϕ.

e. Sapendo che $p(|N(0,1)| < 2.82) = 0.99$ (praticamente uno) in quale intervallo ci si deve aspettare il numero di teste del precedente esperimento?

Analisi Matematica II e Calcolo delle probabilita' - C.d.L. Civile ed Edile
Prova orale A del 1/02/01. Durata: ore 2

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte. Risposte senza giustificazione non verranno ritenute valide.
Per superare la prova orale e' necessario rispondere a qualche quesito in ciascuno dei tre esercizi.

ES.1 (tempo consigliato : 45 minuti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$$

a. Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$ e dare la definizione di $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$.

b. Discutere l'esistenza di massimo e minimo della funzione nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 2 e nel cerchio aperto.

c. Discutere la limitatezza di f e l'esistenza di massimo e minimo globali (si consiglia di passare in coordinate polari).

d. Calcolare la derivata di f in direzione del vettore $v = (1, 3)$ nel punto $P = (0, 0)$ e il piano tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(1, -1, 0)$.

e. Sia $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (1 - t, 1 - t^2)$, calcolare la derivata di $f \circ \gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, nel punto $t = 1$, e la matrice Jacobiana di $\gamma \circ f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, nel punto $P = (0, 0)$.

f. Calcolare il polinomio di taylor del secondo ordine di f centrato nell'origine.

g. Enunciare le condizioni necessarie e le condizioni sufficienti affinche' un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ sia un massimo o un minimo locale per f. Determinare i punti stazionari della f e studiarli.

ES.2 (tempo consigliato : 30 minuti) Considerare la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$$

a. Calcolare l'insieme in cui la serie converge puntualmente.

b. La serie converge uniformemente in $[1, 6]$?

c. Determinare gli intervalli in cui la serie converge uniformemente.

d. Definire il significato di $\sum_{n\geq 0} e^{-n} = L \in \mathbb{R}$

e. Calcolare la somma della serie, specificando l'insieme su cui l'uguaglianza e' verificata.

ES.3 (tempo consigliato : 45 minuti) Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 2$.

a. Disegnare il grafico della funzione densita' e della funzione di ripartizione di X e definire la funzione di ripartizione in termini di probabilita' e di densita'.

b. Sia Y una variabile aleatoria con la stessa legge di X e da questa indipendente, calcolare la probabilita' $p(|X - Y| < 1)$.

c. Enunciare il teorema del limite centrale. Detto T_{2n} il numero di teste ottenute su $2n$ lanci di una moneta equilibrata, usando l'approssimazione normale e la funzione di ripartizione ϕ di $N(0, 1)$ (normale standard), calcolare le probabilita'

$$a_n = p(|T_{2n} - n| > 10^4) \quad b_n = p(\frac{|T_{2n} - n|}{\sqrt{n}} > 1) \quad c_n = p(\frac{|T_{2n} - n|}{n} > 10^{-4}).$$

calcolare $\lim a_n \quad \lim b_n \quad \lim c_n$ e discutere il risultato confrontandolo con la legge dei grandi numeri.