Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica 1
Lezioni A.A. 2005/2006 , prof. G. Stefani

Testi consigliati:
M.Bramanti, C.D.Pagani, S.Salsa - Matematica - Zanichelli editore
S.Salsa, A.Squellati - Esercizi di Matematica, vol.I - Zanichelli editore

Il registro delle lezioni contiene gli argomenti svolti a lezione ed alcuni suggerimenti su come usare il testo. Occasionalmente saranno proposti esercizi. Se non specificato altrimenti, i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono al testo consigliato. Altri esercizi saranno proposti in un file a parte nella sezione *Materiale didattico* della pagina web del corso.

Alcuni richiami sui **prerequisiti** si trovano anche sul testo consigliato e nel libro di esercizi, altri testi:
M. Roggero, G. Ferrarese - Matematica Zero, Corso di sopravvivenza matematica con esercizi commentati e risolti, Casa Editrice Ambrosiana
G. Malafarina - Matematica per i precorsi, McGraw-Hill
G. De Marco - ANALISI ZERO, Decibel editrice, distribuzione Zanichelli

1 19-23/9.

Martedi' 20/9 (Cap.1, Par. 1,3,4)
1. Spiegazioni sullo svolgimento del corso. Prerequisiti al corso sono stati svolti nel precorso di matematica svoltosi in settembre. Porre particolare attenzione alle proprieta' del valore assoluto, alle equazioni e disequazioni di primo e secondo grado e razionali, alle formule di trigonometria e alle proprieta' di logaritmi ed esponenziali.
Numeri reali, naturali, interi, razionali e notazioni insiemistiche

$$x \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

La retta reale, proprieta' di ordine ($<, \leq$). Valore assoluto e distanza, intervalli (limitati, illimitati, aperti, chiusi, semiaperti) e loro estremi. Lunghezza o misura di un intervallo limitato e sua rappresentazione in termini di distanza. **Esercizio**: trovare centro (punto medio) e raggio di un intervallo limitato (a, b).

2. Rappresentazione grafica di intervalli e soluzioni di disequazioni e sistemi di disequazioni. Esempi:

$$|x+4| < |x-3|,\ x^2 - 4 < 0,\ x^2 \geq 8,\ x^2 \geq -5,\ x^2 \leq -5$$

Rivedere le proprieta' di potenze, esponenziali, logaritmi.
Mercoledi' 21/9 (Cap.1, Par. 5,6,9)
3. Insiemi limitati e illimitati, estremo superiore (inferiore), massimo (minimo) di un insieme. Esempio: gli intervalli. Proprieta' di completezza dei numeri reali.
4. Funzioni: definizione, notazione $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$, dominio, codominio, immagine. Funzioni reali di una variabile reale: grafici, **convenzione sul dominio** (dominio naturale, campo di esistenza). Funzioni definite a tratti.
Giovedi' 22/9 (Cap.4, Par. 1,3)
5. Funzioni limitate, pari, dispari, monotone, periodiche. Estremo superiore e massimo di una funzione
6. Le funzioni elementari e i loro grafici. Grafici delle funzioni potenze intere e radici intere. Grafici delle funzioni potenze a esponente reale e delle funzioni esponenziali. Funzioni trigonometriche. Operazioni sui grafici, esempi.

Venerdi' 23/9 (Cap.4, Par. 3,4)
7. Funzioni composte, invertibili, funzioni inverse.
8. Le funzioni trigonometriche inverse e le funzioni logaritmiche. Le funzioni iperboliche e le loro inverse. Il numero

$$e = 2.7182818459045.....$$

Le funzioni $x \mapsto \exp(x) = e^x,\ x \mapsto \ln(x) = \exp^{-1}(x)$ Le funzioni del tipo $x \mapsto g(x)^{f(x)} = \exp(f(x)\ln(g(x))) = e^{f(x)\ln(g(x))}$

2 26-30/9

Martedi' 27/9
9. 10. Lezioni tenute dal Dott. Fumagalli:
Polinomi. Enunciato dell'algoritmo della divisione fra polinomi e svolgimento dell'esercizio: calcolare resto e quoziente di $X^3 + 3X^2 - X + 5$ diviso per $X + 2$.
Operazioni su grafici elementari. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni

$$f(X) = |1/X - 1|,\ |\cos(X - \pi)|,\ 2\arctan(|X|),\ |\ln(-X) - 1|,\ |\sin(X)|,\ \sin(|X|).$$

Valore assoluto. Risolvere: $|2X - 1| \leq 5$. Risolvere geometricamente e analiticamente al variare di a e b la disequazione $|X - a| > |X + b|$. Disegnare il grafico di $y = |X - 1| + |2 - X|$
Funzioni inverse. Calcolare, quando esiste, la funzione inversa di $f(X) = \log_2(X^3)$ ed esplicitare dominio e codomio di f e f^{-1}.
Mercoledi' 28/9 (Cap.2, Par. 1)
11. Successioni: definizione esempi

$$a_n = n,\ n^2,\ (-1)^n,\ 1/n,\ \frac{n+1}{n-1}$$

Successioni limitate, convergenti, divergenti, irregolari. Limite di una successione. Uso dell'avverbio *definitivamente* per le successioni. Successioni infinitesime e infinite. Esempi: le successioni precedenti e studio della successione $\{q^n\}$ al variare di $q \in \mathbb{R}$.
12. Successioni (definitivamente) monotone e loro limite. Proprieta' dei limiti: unicita' del limite, monotonia del limite, teorema del confronto (o dei carabinieri), teorema della permanenza del segno.
Giovedi' 29/9 (Cap.2, Par. 1)
13. Calcolo dei limiti: limite di somma, prodotto e quoziente.

ATTENZIONE: sul libro nelle regole per il calcolo dei limiti a pg.130 si legge

$$\frac{a}{0} = \infty \qquad (a \neq 0)$$

Questa affermazione va letta tenendo conto della precedente frase:
il segno di ∞ va determinato con la usuale regola dei segni.
In particolare se $a_n \to a \neq 0$ e b_n e' infinitesima e non definitivamente a segno costante, allora $\frac{a_n}{b_n}$ non ha limite. Esempio:

$$a_n \equiv 1 \to 1\ , \quad b_n = \tfrac{(-1)^n}{n} \to 0 \quad \text{e} \quad \tfrac{a_n}{b_n} = (-1)^n n \quad \text{non ha limite}$$

14. Esempi di calcolo di limiti di successioni.
Venerdi' 30/9 (Cap.1, Par. 2)
15. Senza dimostrazione:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818459045.....$$

Ordine nelle successioni infinite e infinitesime, in particolare studio dei limiti

$$\frac{n^\alpha}{q^n},\ \alpha > 0,\ q > 1, \quad \text{e} \quad \frac{q^n}{n!},\ q > 1$$

Definizione di successioni asintotiche: infiniti e infinitesimi equivalenti.
16. I coefficienti binomiali. Il simbolo di sommatoria e le sue proprieta': prodotto per una costante, sommatoria con termine costante, somma, composizione. Somma dei primi n numeri naturali, progressione aritmetica, progressione geometrica, esempi. Formula di Newton per la potenza n-sima di un binomio.

3 3-7/10

Martedi' 4/10
17.18 Lezioni tenute dal Dott. Fumagalli:
Funzioni inverse. Determinare quando esistono le funzioni inverse di $y = f(X)$ e specificare dominio di f e f^{-1}

$$f(X) = X^2 - 3X - 4,\ \text{con } D = R \text{ e con } D = [3/2, +\infty), \quad f(X) = 3^{X-1}, \quad f(X) = \tan(X-1)$$

Domini di funzioni. Calcolare i domini delle seguenti funzioni

$$f(X) = \sqrt{2\cos(X) - 1}, \quad \ln(X^2 - 1), \quad \ln(\ln(\sqrt{X+2})), \quad \arcsin(\sqrt{X} - 1), \quad \sqrt{\frac{2x + \sqrt{1-x^2}}{\sin(\pi x)}}$$

Funzioni composte. Esplicitare il dominio di $y = f(X)^{g(X)}$, in particolare: $y = (\arccos(X))^{\ln(X)}$ e $y = (\ln(X))^{\arctan(X)}$. Dire quali fra le seguenti affermazioni e' vera:
1. $\arcsin(\sin(x)) = x - \pi$ per ogni $x \in (\pi/2, \pi]$
2. $\arcsin(\sin(x)) = x$ per ogni $x \in (-3, 3)$
3. $\arcsin(\sin(x)) = x$ per ogni $x \in R$
4. $\arcsin(\sin(x)) = x - \pi$ per ogni $x \in [\pi/2, \pi]$

Mercoledi' 5/10 (Cap.3, Par. 2)
19. Serie, definizione della successione delle somme parziali. Carattere di una serie: convergente, divergente, irregolare, somma di una serie.
20. Serie geometrica e armonica. Condizione necessaria alla convergenza di una serie. Serie (definitivamente) a termini non negativi e serie a segni alterni: definizione. Serie assolutamente convergenti.
Giovedi' 6/10 (Cap.3, Par. 2)
21. Serie a termini non negativi: criteri del confronto e del confronto asintotico. Criterio del rapporto e della radice.
22. Esercizi: serie di Mengoli $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ e serie telescopiche, serie armonica generalizzata.
Venerdi' 7/10 (Cap.3, Par. 2)
23. Serie a segni alterni: criterio di Leibniz. Esempi
24 Esercizi

Nella settimana 10-14 le lezioni sono state sospese per protesta contro la riforma dello stato giuridico della docenza. Sono previste lezioni di recupero.

4 17-21/10

Martedi' 18/10
25.26 Lezioni tenute dal Dott. Fumagalli
Mercoledi' 19/10 (Cap. 4.2,3)
27. Intorni di un punto e di $\pm\infty$. Uso del termine *definitivamente per* $x \to c$ ($\pm\infty$). Limiti di funzioni per $x \to c$, limiti $x \to \pm\infty$. Funzioni infinitesime e infinite. Limite destro e sinistro, per eccesso e per difetto. Unicita' del limite.
28. Funzioni continue in un punto e in un insieme, discontinuita' di salto, funzioni continue a destra e a sinistra. Asintoti verticali, orizzontali e obliqui. Estensione per continuita' di una funzione. **Esercizio per casa:** riguardare i grafici delle funzioni elementari e dedurne empiricamente la continuita' e l'esistenza di asintoti per le funzioni, considerare con particolare attenzione le funzioni $x \mapsto x^\alpha$ e la loro eventuale estensione per continuita'. Proprieta' delle funzioni continue: somma, prodotto, quoziente, composizione. Esempi.
Giovedi' 20/10 (Cap. 4.5)
29. Funzioni continue su intervalli limitati e chiusi: teorema degli zeri e di Weirstrass.
30. Immagine di un intervallo mediante una funzione continua e sue conseguenze sull'esistenza di massimi e minimi.
Venerdi' 21/10 (Cap. 4.6)
31. Calcolo dei limiti: teoremi del confronto, della permanenza del segno, algebra dei limiti. Infiniti e infinitesimi equivalenti, funzioni asintotiche per $x \to \alpha$. Dimostrazione del fatto che ogni polinomio di grado dispari ammette una radice reale.
32. Il cambiamento di variabile nel calcolo dei limiti. Alcuni limiti notevoli. La funzione $x \mapsto \sin(x)/x$. Calcolo del $\lim \sin(x)/x$ per $x \to 0$.
Sabato 22/10 (Cap. 5.1,2)
33.34. Lezioni di recupero, ore 9-11 aula 120 di S.Marta. Rette tangenti e velocita' istantanea: descrizione intuitiva. Definizione di derivata, derivata destra, derivata sinistra. Interpretazione geometrica, fisica e in termini di approssimazione della derivata. Punti angolosi, cuspidi, flessi a tangente verticale. Continuita' e derivabilita'. **Studiare a casa: derivate delle funzioni elementari**, con particolare riguardo a x^α.

5 24-28/10.

Martedi' 25/10
35.36. Lezioni tenute dalla Prof. Poggiolini: esercizi sui limiti.
Mercoledi' 26/10 (Cap. 5.3)
37. Algebra delle funzioni derivabili. Derivata della funzione composta (regola della catena o cambiamento di variabile nella derivata). Derivata delle funzioni $f(x)^{g(x)}$.
38. Derivata della funzione inversa. Esercizi: calcolo della derivata di arcsin, a partire dalla derivata della funzione sin con la regola della derivata della funzione inversa.
Giovedi' 27/10 (Cap. 5.4)
39. Teorema del valor medio e suo significato in termini geometrici e di approssimazione, sue conseguenze: funzioni a derivata nulla, test di monotonia e applicazioni.
40. Massimi e minimi locali e teorema di Fermat. Ricerca dei massimi e minimi sugli intervalli limitati e chiusi. Esercizi.
Venerdi' 28/10 (Cap. 5.4,5)
41. Teorema di De l'Hospital e applicazioni al calcolo di alcuni limiti notevoli.
42. Derivate successive. Gli insiemi $C^k(\mathbb{R})$. Convessita' e concavita' delle funzioni

definite su intervalli.
Sabato 29/10
43.44. Lezioni di recupero, ore 9-11 aula 111 di S.Marta. Esercizi:

1. Dimostrazione della formula del binomio di Newton applicando la derivazione di ordine $k = 1, .., n$ all'identita'

$$P(x) = (1 + x)^n = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$$

   e calcolando $P^{(k)}(0)$

2. Sudio della funzione $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ con applicazione alla determinazione del numero di radici di un polinomio di grado 3

3. Studio della serie $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(\sqrt{x})^n 3^{n+1}}{(x+1)^{n+1}}$

6 31/10-4/11

Mercoledi' 2/11 (Cap. 5.6)
45. Lezione tenuta dal Dott. Fumagalli: studio del grafico di una funzione.
46. Lezione tenuta dal Dott. Fumagalli: esempi e esercizi.
Giovedi' 3/11
47.48. Esercizi: grafico della gaussiana e di $\exp(-1/x)$, $\exp(-1/x^2)$. Studio di alcune serie dipendenti da un parametro.
Venerdi' 3/11
49.50. Esercizi su: massimi e minimi su intervalli, infiniti e infinitesimi di ordine superiore, convergenza di serie.

7 7-11/11

Mercoledi' 9/11 (Cap. 5.7,6.1,6.2)
49. Differenziale e approssimazioni lineari. Studio dell'ordine dell'errore in funzione della derivata seconda. Il simbolo o piccolo e i limiti. Esempi fra cui $\sin(x) - x = o(x^2)$ per $x \to 0$. Ordine di un infinitesimo. Esempio: $x \ln(x)$ non ha ordine per $x \to 0$.
50. Calcolo integrale. Introduzione del concetto di misura, definizione di integrale di Riemann di funzioni continue su intervalli limitati e chiusi e sua interpretazione in termini di area per funzioni positive e negative. Definizione di integrale orientato di funzioni continue su intervalli limitati e chiusi e sua interpretazione in termini di area per funzioni positive e negative.
Venerdi' 11/11 (Cap. 6.2,6.3)
51. Proprieta' dell'integrale: linearita' rispetto alla funzione, additivita' rispetto all'intervallo, monotonia rispetto alla funzione, proprieta' rispetto al valore assoluto. Teorema della media e sua dimostrazione.
52. Relazione fra integrale e area: interpretazione dell'integrale come somma algebrica di aree e calcolo dell'area della parte di piano delimitata dal grafico di una funzione continua, l'asse delle x e due rette verticali. Esercizi:

1. Calcolo, mediante la definizione, di $\displaystyle\int_a^b 1\,dx$ e sua interpretazione geometrica in funzione di $a, b \in \mathbb{R}$, da svolgere a casa.

2. Calcolo, mediante la definizione, di $\int_a^b x\,dx$ e sua interpretazione geometrica in funzione di $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Esprimere, mediante integrali orientati, l'area della parte di piano compresa fra le curve

$$y = \sin(3x), \quad y = 0, \quad x = -\pi/3, \quad x = \pi/4$$

8 14-18/11

Mercoledi' 16/11
53.54 Lezioni tenute dal Dott.Fumagalli. Calcolo dell'area della regione Ω del piano compresa fra i grafici di due funzioni continue

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Calcolo di integrali di funzioni a partire dalla interpretazione geometrica, usando le proprietà degli integrali. Esprimere l'area di regioni piane mediante integrali, senza calcolarli.
Venerdi' 18/11(Cap. 6.4,6.8)
55. 56 Teorema fondamentale del calcolo con dimostrazione. Primitive di una funzione su un intervallo: definizione e relazione col teorema fondamentale del calcolo. Formula fondamentale del calcolo con dimostrazione. Esercizi sulle funzioni integrali.

Attenzione.

L'esposizione della materia è diversa da quella seguita nel testo. Viene chiamato *Teorema fondamentale del calcolo* quello che sul testo è chiamato *Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale, pg.311.* Mentre viene chiamata *Formula fondamentale del calcolo* quello che sul testo è chiamato *Teorema teorema fondamentale del calcolo integrale, cap. 6.4, pg.287.*

Linee guida per l'esposizione seguita nelle lezioni.

- Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I e sia $a \in I$. Definizione della funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ e dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo (Cap. 6.8, pg.311)
- Definizione di primitiva di una funzione f su un intervallo e struttura dell'insieme delle primitive (Cap. 6.4, pg.286).
- Dimostrazione della formula fondamentale del calcolo (Cap. 6.4, pg.287). La dimostrazione è diversa da quella del libro e fa uso del precedente teorema.

Esercizi svolti

1. Area della parte di piano compresa fra i grafici

$$y = 1/x, \qquad y = 0, \qquad x = 1$$

2. Area della parte di piano compresa fra i grafici

$$y = 1/x, \qquad y = 0, \qquad x = 1/2$$

3. Completamento dell'esercizio 3 di venerdi' 11/11
4. Studio del grafico della funzione

$$t \mapsto \int_1^x t\ln(t)\,dt$$

mediante il teorema fondamentale del calcolo, senza calcolo della primitiva.

9 21-25/11

Mercoledi' 23/11 (Cap. 6.5)
63.64 Lezioni tenute dal Dott.Fumagalli: calcolo delle primitive.
Venerdi' 25/11 spostata a **Lunedi' 28/11** per lo sciopero generale.
65.66.67 Lezioni tenute dal Dott.Fumagalli: calcolo delle primitive e delle aree.

10 28/11-2/12

Mercoledi' 30/11 (Cap. 6.7,8)
68.69 Integrali di funzioni limitate su intervalli limitati. Integrabilita' delle funzioni continue a tratti. Funzioni integrali e loro continuita'. Derivabilita' delle funzioni integrali e esistenza di punti angolosi.
Esercizio.
Studio delle funzioni integrali della funzione parte intera $x \mapsto k \in \mathbb{Z}$ per $x \in [k, k+1)$
Venerdi' 1/12 (Cap. 6.7,8)
70.71. Integrali impropri: integrale di funzioni illimitate su intervalli limitati. Integrali sulla semiretta. Convergenza degli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \,, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Studio delle funzioni integrali ed esistenza di asintoti verticali e orizzontali. Applicazione della convergenza degli integrali impropri sulla semiretta allo studio della convergenza della serie armonica e armonica generalizzata.

11 5-9/12

Mercoledi' 7/12 (Cap. 6.7)
72.73 Criteri di convergenza e convergenza asintotica per gli integrali impropri. Esercizi.
Venerdi' 9/12
74.75 Esercizi