

Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2005-2006
Prove scritte dell'appello di Aprile

Ai seguenti quesiti si deve sempre rispondere giustificando le risposte.

1. Disegnare il grafico della funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

e rispondere ai seguenti quesiti sulla funzione F definita da

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$$

- (a) Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione F determinando crescita, decrescenza, convessità concavità ed eventuali punti di discontinuità e singolari.
- (b) Descrivere in termini di aree il valore $F(1)$
- (c) Descrivere in termini di aree il valore $F(x)$ per ogni $x \in D_F$
- (d) Determinare l'esistenza di asintoti verticali ed orizzontali per F , mettendoli in relazione con gli opportuni integrali impropri.
- (e) Calcolare $F(x)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$.
2. Calcolare l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione

$$x \mapsto \frac{1-x}{3+x}$$

l'asse x e le rette $x = -1$ e $x = 3$.

3. Stabilire al variare di $x \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n \geq 1} (2 \sin(x))^n$$

e calcolarne la eventuale somma.

4. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo sulla relazione fra derivazione e integrale di Riemann orientato.
5. A partire dal grafico di $x \mapsto \exp(-x^2)$, che può considerarsi noto (campana di Gauss), disegnare il grafico della funzione definita da

$$f(x) = |\exp(-x^2) - 4|$$

indicando sul grafico le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali e verticali. Inoltre a partire dal grafico rispondere ai seguenti quesiti.

(a) Determinare gli eventuali punti angolosi di f e le tangenti in tali punti.

(b) Stabilire se converge il seguente integrale improprio

$$\int_0^{\infty} (f(x) - 4) dx.$$

(c) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le intersezioni fra il grafico di f e la retta $y = k$.

6. Enunciare il criterio del rapporto per le serie a termini positivi.

7. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n>1} \frac{1}{n^\alpha}?$$

Dimostrare la risposta per $\alpha = 1$