Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile - Anno accademico 2005-2006
Prove scritte date nell'appello di luglio
- luglio-dati

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

1. A partire dal grafico di $x \mapsto \ln(x)$, che deve considerarsi noto, disegnare, al variare di $n \in \mathbb{N}$, il grafico della funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} |\ln(x + 1/9)| - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ x^n & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

   indicando sul grafico le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali e verticali. Inoltre a partire dal grafico rispondere ai seguenti quesiti.

   (a) Determinare gli eventuali punti di discontinuità di f.

   (b) Determinare, per $n = 1$, l'area della parte di piano compresa fra il grafico di f, l'asse x e le rette verticali $x = -1$ e $x = 1$.

   (c) Determinare, al variare di $n \in \mathbb{N}$, l'area della parte limitata di piano compresa fra il grafico di f, l'asse x e le rette verticali $x = -1$ e $x = 1$.

   (d) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di f, al variare di $n \in \mathbb{N}$.

   (e) Determinare il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = -1/2$, al variare di $n \in \mathbb{N}$.

   (f) Determinare, per $n = 4$, il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

   (g) Stabilire, al variare di $n \in \mathbb{N}$ e usando la definizione, se la funzione $f(x)$ è equivalente alla funzione $\ln(x)$ per $x \to \infty$.

   (h) Stabilire, al variare di $n \in \mathbb{N}$ e usando la definizione, se la funzione $f(x)$ è equivalente alla funzione $\ln(-x)$ per $x \to -\infty$.

2. Stabilire, usando la definizione, se la serie

$$\sum_{n \geq 1} (2x)^n$$

   converge, diverge o è indeterminata, al variare di $x \in \mathbb{R}$ e calcolarne la eventuale somma. Applicare il risultato ottenuto per determinare, al variare di $x \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n \geq 1} (2\sin(x))^n$$

   e per calcolarne la eventuale somma.

3. Enunciare il criterio del rapporto per le serie a termini positivi ed illustrarlo con un esempio.

4. Usando la definizione, stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie e calcolarne la somma

$$1 + \sum_{n \geq 1} (\arccos(x))^n$$

Rispondere ai seguenti quesiti sulla precedente serie motivando le risposte

   (a) La precedente serie è a termini positivi?

   (b) Dimostrare che la precedente serie non può essere indeterminata

   (c) Enunciare il criterio del rapporto per le serie a termini positivi ed applicarlo alla precedente serie

   (d) Enunciare il criterio della radice per le serie a termini positivi ed applicarlo alla precedente serie

5. A partire dal grafico di $x \mapsto e^{-x}$, che deve ritenersi noto, disegnare il grafico della funzione definita da

$$f(x) = |e^{-x} - 1| - 1/2$$

   (a) Rispondere, a partire dal grafico, alle seguenti domande

      i. Determinare le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali e verticali

      ii. Scrivere esplicitamente $f(x)$ come funzione definita a tratti

      iii. Determinare eventuali punti angolosi e cuspidi e le tangenti in tali punti

   (b) Calcolare $\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$ e interpretarlo in termini di aree.

   (c) Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione $x \mapsto \displaystyle\int_{3}^{x} f(t)\,dt$

   (d) Dimostrare che la funzione $x \mapsto \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,dt$ non ammette asintoti orizzontali, mettendoli in relazione con gli opportuni integrali impropri.

   (e) Considerare la funzione $F : x \mapsto \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,dt$

      i. Verificare, usando le proprietà dell'integrale e il teorema fondamentale del calcolo, che $F \in C^\infty((2,3), \mathbb{R})$

      ii. Verificare, usando le proprietà dell'integrale e il teorema fondamentale del calcolo, che $F \notin C^3([-1,1], \mathbb{R})$