

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Analisi Matematica 1

Esercizi relativi alla prima settimana di lezione (e dei prerequisiti) dell'A.A. 2005/06

1. Testo di Esercizi: capitolo 1 paragrafo 3 (esclusi gli esercizi che contengono il simbolo di sommatoria) e cap.3 paragrafo 1
2. Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni e sistemi di disequazioni, esprimendole tramite unioni di intervalli

$$3x + 5 \leq 3 (< 3), \quad \frac{3x + 5}{x - 7} \leq \frac{x}{x - 1}, \quad |x + 3| < 4 (\geq 4), \quad \frac{2x^2 - 4x}{x + 7} \geq 0$$

$$\begin{cases} 3x + 5 \leq 3 \\ x + 7 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x + 5 \leq 3, \\ x - 7 > 0 \end{cases}$$

2. Risolvere graficamente, usando la nozione di distanza le seguenti disequazioni

$$|x - 2| \leq 3, \quad |x + 5| \geq 1, \quad |x + 5| \geq -1, \quad |x + 5| \leq -1, \quad x^2 < 1, \quad x^4 > 16, \quad |x - 1| \leq |x + 2|$$

3. Data la disequazione

$$\frac{x + 5}{x - 3} < -4,$$

per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa, dandone una spiegazione teorica.

1. La disequazione è equivalente a:
 - i) $x + 5 < -4(x - 3)$
 - ii) $x + 5 > -4(x - 3)$
 - iii) se nessuna delle precedenti equivalenze è vera, determinarne una corretta.
2. L'insieme delle sue soluzioni è
 - i) un intervallo limitato
 - ii) un intervallo limitato e chiuso
 - iii) un intervallo limitato e aperto
 - iv) una semiretta
 - v) l'unione disgiunta di un intervallo limitato e di una semiretta
4. Risolvere al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ le disequazioni $|x - a| \leq b (< b)$ e $|x - a| \geq |x + b|$
5. Date $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$, $h : x \mapsto 1/x$, calcolare $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ h$, specificando il dominio.
6. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x & x \in [-1, 1] \\ -x^2 & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x < 1 \\ x & x \in [1, 2] \\ 2 - x^2 & x > 2 \end{cases}$$

7. Supponiamo di conoscere 3 (2) radici reali e distinte di un polinomio P di grado 4. Cosa posso dedurre sul numero di radici reali di P ? In particolare:
Quante radici reali e distinte ha al massimo P ?
Quante radici reali contate con la loro molteplicità ha al minimo P ?

Quanti fattori di primo grado ha al minimo P ?
Quanti fattori di primo grado ha al massimo P ?

8. Supponiamo di conoscere 3 (2) radici reali e distinte di un polinomio P di grado 5. Cosa posso dedurre sul numero di radici reali di P ? In particolare:
Quante radici reali e distinte ha al massimo P ?
Quante radici reali contate con la loro molteplicità ha al minimo P ?
Quanti fattori di primo grado ha al minimo P ?
Quanti fattori di primo grado ha al massimo P ?

9. Determinare quoziente e resto della divisione fra le seguenti coppie di polinomi

$$x^3 - 2x^2 + 3 : x + 1, \quad x^3 - 2x^2 + 3 : x - 1$$
$$x^3 - 2x^2 + 3 : x^2 + 1, \quad x^3 - 2x^2 + 3 : x^3 - 1$$

10. Senza eseguire la divisione, determinare il resto della divisione fra le seguenti coppie di polinomi

$$x^3 - 2x^2 + 3 : x + 5, \quad x^3 - 2x^2 + 3 : x - 3$$
$$x^5 + 2x^2 + 3 : x - 1, \quad x^4 + 2x^3 + 3 : x + 1$$

E' possibile eseguire lo stesso esercizio con la divisione $x^3 - 2x^2 + 3 : x^3 - 1$?

11. Determinare, quando esistono, le funzioni inverse delle seguenti funzioni, specificando il dominio della funzione e dell'inversa

$$f(x) = x^2 - 2x + 3, f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ con dominio } [2, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 1} \text{ con dominio } (-\infty, 1)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 1} \text{ con dominio } (1, 2), \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 1} \text{ con dominio } [1, 2]$$

$$f(x) = 2^{x+3}, \quad f(x) = 2^{x^2+3} \text{ con dominio } [2, +\infty)$$

$$f(x) = \log_2(x^3), \quad f(x) = \log_2(x^2 - 1)$$

$$f(x) = \log_2(x^2 + 1) \text{ con dominio } (-\infty, 0)$$

12. Determinare il dominio delle funzioni

$$\sqrt{2 \cos(x) + 1}, \quad \sqrt{2 \cos(x) \pm 4}, \quad \sqrt{\frac{1}{|\tan(x)|}}, \quad \sqrt{\frac{x + \sin(\pi x)}{\sqrt{1 - x^2}}}, \quad \arcsin(x^2 - 1), \quad \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

13. Usando i concetti di cambio scala, traslazione e simmetria disegnare i grafici delle seguenti funzioni a partire da grafici noti

$$\sqrt{1-x} + 1, \quad \sin(|x|), \quad |\sin(x)|, \quad \sin(\pi x), \quad |\arcsin(x/\pi)|, \quad 2 \arctan(|x|) - 2$$

$$e^x, \quad e^{-x}, \quad e^{|x|}, \quad e^{-|x|}, \quad y = -e^{-|x|}$$

$$\ln(x), \quad \ln(-x), \quad \ln(|x|), \quad \ln(-|x|), \quad |\ln(x)|, \quad -\ln(-x), \quad -\ln(|x|)$$

14. Usando l'uguaglianza $\frac{x+5}{x-3} = 1 + \frac{8}{x-3}$, e i concetti di traslazione e cambio scala disegnare il grafico $y = \frac{x+5}{x-3}$, risolvere graficamente la disequazione $\frac{x+5}{x-3} < -4$ e confrontare il risultato con l'esercizio 3.

15. Calcolare il dominio delle funzioni $x \mapsto \ln(x)^{\arcsin(x)}$, $x \mapsto \arcsin(x)^{\ln(x)}$