Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 2005/06
Analisi Matematica I
Esercizi sulle funzioni integrali e gli integrali impropri

I seguenti esercizi contengono anche domande-tipo, per la prova scritta d'esame ed alcuni presuppongono i criteri di convergenza asintotica per gli integrali impropri

1. Svolgere gli esercizi del testo e del testo di esercitazione riguardanti gli integrali impropri (generalizzati) e le funzioni integrali.

2. Determinare quali dei seguenti integrali sono impropri e determinarne il carattere

$$\int_0^1 \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2}dx, \quad \int_1^{-\infty} \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2}dx, \quad \int_0^1 \frac{\exp(x)-1}{(\cos(x)-1)}dx$$

3. Studiare la funzione

$$t \mapsto \int_1^t \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2}dx,$$

dove l'integrale e' da intendersi come l'integrale di Riemann orientato.

4. Studiare le due funzioni

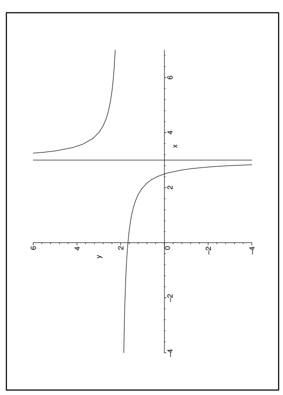
$$t \mapsto \int_1^t \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx, \quad t \mapsto \int_{-2}^t \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx.$$

In particolare si determinino gli eventuali asintoti orizzontali e verticali.

5. Disegnare il grafico di

$$t \mapsto \int_1^t \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx, \quad t \mapsto \int_1^t \exp\left(-\frac{1}{x}\right)dx, \quad t \mapsto \int_1^t \exp\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione il cui grafico e' rappresentato dalla seguente figura, dove gli asintoti hanno equazioni $x = -1$ e $y = 3$ e le intersezioni con gli assi sono nei punti $(-0.8, 0)$ e $(0, 2.8)$



Considerare la funzione integrale $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

a. Determinare il dominio di F, indicare eventuali punti di discontinuita', punti angolosi, punti a tangente verticale o cuspidi.

b. Determinare in quali intervalli F e' crescente, decrescente, concava o convessa.

c. Spiegare perche' F non puo' avere un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

d. Disegnarne i possibili grafici di F, mettendoli in relazione l'opportuno integrale improprio.

e. Ripetere l'esercizio per $G : x \mapsto \int_{-22}^{x} f(t)dt$

7. Sia $f(x) = \begin{cases} 2x & x < -\pi \\ \sin(x) & x \geq -\pi \end{cases}$ e sia

$$G(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

1) Disegnare il grafico di f.
2) Senza calcolare l'integrale, usando il teorema fondamentale del calcolo, disegnare il grafico di G.
3) Calcolare $G(x)$ al variare di x nel dominio di G e interpretarlo in termini di aree.

8. Considerare la funzione

$$H(x) = \int_0^{\cos(x)} \exp(-t^2) dt$$

Si scriva H come composizione di una funzione integrale e la funzione $\cos$. Usando il teorema fondamentale del calcolo e la derivata della funzione composta, determinare $H'(x)$.

9. Usando il teorema di De l'hopital, si calcoli al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0^-} |x|^\alpha \int_0^x t \ln(|t|) dt$$

10. Disegnare il grafico delle funzioni

$$t \mapsto \int_1^t \frac{e^{(x-2)}}{x^4} dx, \quad t \mapsto \int_{-5}^t \frac{e^{(x-2)}}{x^4} dx$$