Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I
Esercizi sugli integrali

1. Svolgere gli esempi e gli esercizi dei paragrafi 6.5.1,2 del testo.

2. Svolgere gli esercizi del capitolo 5 paragrafi 1,2 del testo di esercizi.

3. Senza calcolare l'integrale, disegnare per quanto possibile i grafici delle seguenti funzioni

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt\ ,\ \int_{-3}^x \frac{1}{t}dt\ ,\ \int_1^x \frac{t-1}{1+t^2}dt\ ,\ \int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}dt\ ,\ \int_0^x \frac{1+t^2}{t-1}dt\ ,\ \int_2^x \frac{1+t^2}{t-1}dt$$

   in particolare: determinare il dominio, crescenza e decrescenza, covessita' e concavita', eventuali punti di massimo e minimo globale (assoluto) o locale (relativo)

4. Senza calcolare l'integrale, che non puo' essere espresso tramite funzioni elementari, determinare crescenza e decrescenza, covessita' e concavita', eventuali punti di massimo e minimo globale (assoluto) o locale (relativo) della funzione $F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$\int_2^x \frac{1+t^5}{\ln(t)}dt.$$

   Inoltre:

   a. Verificare che la parte di piano compresa fra il grafico della funzione e l'asse x contiene rettangoli di altezza $h = 1$ e base b arbitraria e dedurne che F non ha asintoti orizzontali

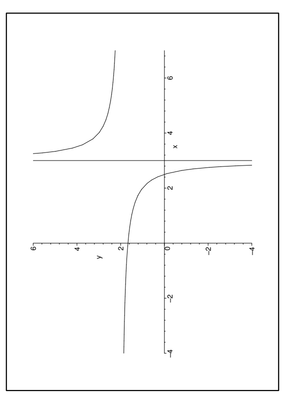
   b. Verificare (graficamente) che $2t > \ln(t), \quad \forall t > 1$, e, dopo aver notato che

$$(1 + t^5)/\ln(t) > 2t/\ln(t), \quad \forall t > 1,$$

   dedurre che $x = 1$ e' un asintoto verticale per F.

   c. Disegnare il grafico di F.

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione il cui grafico e' rappresentato dalla seguente figura, dove gli asintoti hanno equazioni $x = -1$ e $y = 3$ e le intersezioni con gli assi sono nei punti $(-0.8, 0)$ e $(0, 2.8)$



   Considerare la funzione integrale $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

a. Determinare il dominio di F, indicare eventuali punti di discontinuita', punti angolosi, punti a tangente verticale o cuspidi.
b. Determinare in quali intervalli F e' crescente, decrescente, concava o convessa.
c. Spiegare perche' F non puo' avere un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$
d. Disegnarne i possibili grafici di F

6. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni

$$x\cos(x), \quad xe^x, \quad \cos(3x), \quad \frac{\cos(\ln(x))}{x}, \quad x\sqrt{1-x^2}, \quad x\sqrt{1+x^2}$$

7. Spiegare la relazione fra integrale orientato e area. Determinare l'area della regione di piano compresa fra l'asse x il grafico della funzione $f(x) = x\cos(2x)$ e le rette $x = 0, \quad x = \frac{3\pi}{4}$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 3$

9. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali di $f(x) = \frac{x^2-1}{x+5}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 2$

10. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = 4 - x^2$, e $y = (x-1)^2$.

11. Calcolare il segno della funzione $f(x) = x\cos(x/2)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione l'asse x e le rette verticali $x = -\pi/3$ e $x = \pi/2$

12. Disegnare i grafici delle funzioni $f(x) = xe^{x-2}$ e $f(x) = e^{-4}x$. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici

13. Disegnare e calcolare l'area della parte limitata di piano compresa i grafici delle funzioni $y = \sqrt{2-x^2}$ e $y = 1$.

14. Disegnare il grafico di

$$f : x \mapsto \begin{cases} x\exp(-x) & \text{se} \quad x > 0 \\ x & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

   (a) Spiegare perche' f ammette primitive.
   (b) Quante volte sono derivabili le sue primitive?
   (c) Disegnare il grafico della primitiva F di f tale che $F(-1) = 0$ senza calcolarla, in particolare specificare il dominio e discutere l'esistenza di massimi e minimi relativi ed assoluti e di asintoti verticali e orizzontali.
   (d) Calcolare la primitiva F di f definita nel precedente punto.

15. Considerare la funzione

$$H(x) = \int_0^{\cos(x)} \exp(-t^2)dt$$

Si scriva H come composizione di una funzione integrale e la funzione $\cos$. Usando il teorema fondamentale del calcolo e la derivata della funzione composta, determinare $H'(x)$.

16. Sia f la funzione definita da $f(x) = \displaystyle\int_1^x \arccos(\ln(t))\, dt$. Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
f e' definita in $[1/e, e]$
f e' definita in $(-\pi/2, \pi/2)$
f e' definita in $\mathbb{R}$
f ha minimo negativo
f ha massimo positivo
f ha per tangente al suo grafico la retta $y = (\pi/2)(x-1)$
f e' decrescente nel suo dominio
f ha per tangente al suo grafico la retta $y - \pi/2 = (x-1)$ nel punto di ascissa 1
f e' positiva per $x > 1$ nel suo dominio
f e' negativa per $x < 1$ nel suo dominio
f e' strettamente crescente nel suo dominio
f non ha minimo
f non ha massimo
f e' positiva per $x > 0$ nel suo dominio
f e' negativa per $x > 1$ nel suo dominio

Disegnare il grafico di f

17. Sia Sia $f : (0,3) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $G(x) = \int_x^1 f(t)dt$. Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
$G'(x) = -f(x)$ in $(0,3)$
$G'(x) = f(x)$ in $(0,3)$
$G''(x) = f'(x)$ in $(0,3)$
$G''(x) = -f'(x)$ in $(0,3)$
$G'(x) = -f(x)$ in $[0,3]$
$G''(x) = -f(x)$ in $(0,3)$

18. Sia Sia $f : (0,3) \cup (5,7) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione con derivata seconda in $(0,3)$
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,7) - \{3,5\}$
$H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione derivabile in $(0,7) - \{3,5\}$
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione derivabile in $(0,3)$
$H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione con derivata seconda in $(5,7)$
$H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,3)$
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione con derivata seconda in $(0,3) \cup (5,7)$
$H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,3) \cup (5,7)$
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,7)$