Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica 1
Esercizi relativi alla quinta settimana di lezione dell'A.A. 2005/06

Questi esercizi sono da considerarsi materiale aggiuntivo rispetto agli esercizi del testo, che devono comunque essere svolti.

1. Svolgere gli esercizi del Capitolo 5 del testo e del Capitolo 4 del testo di esercizi.

2. Con il cambiamento di variabile calcolare, **se esistono** (attenzione anche al dominio!!!), i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\cos(1/x)}, \quad \lim_{x\to 0} e^{(-1/x^2)}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \ln(1/(x-x^3+1))$$

3. Determinare, per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni risultano appartenere a $C^1(\mathbb{R})$ e a $C^2(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} 3x+5 & x \leq 3 \\ x+a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x/a+5 & x \leq 3 \\ x+a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos(ax) & x \leq 0 \\ \sin(x+a) & x > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sqrt{ax} & x \leq 0 \\ -\sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$$

   Per i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui le funzioni risultano continue ma non derivabili in $x = x_0$, determinare se x_0 e' un punto angoloso, un punto a tangente verticale o una cuspide.

4. Determinare, per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni risultano appartenere a $C^1(\mathbb{R})$ e a $C^2(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} a\cos(3x) & x \leq 0 \\ ax+bx^2 & x > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a\cos(3x) & x \leq 0 \\ a+bx^2 & x > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2ax^2+bx+1 & x \leq 1 \\ ax+2b & x > 1 \end{cases}$$

   Per i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui le funzioni risultano continue ma non derivabili in x_0, determinare se x_0 e' un punto angoloso, un punto a tangente verticale o una cuspide.

5. Siano date le funzioni definite da

$$f_1(x) = \sqrt{x+3} - 5, \; f_2(x) = \frac{x}{1-x}, \quad f_3(x) = \sqrt{1-x^2},$$

$$f_4(x) = \left|x^3-1\right| + 3, \quad f_5(x) = \left|x^2-3x-4\right|, \quad f_6(x) = \sqrt[7]{x-x^2}$$

$$f_7(x) = \sqrt{|x^3-1|}, \quad f_8(x) = \sqrt{|x^2-3x-4|}, \quad f_9(x) = \exp(|x-x^2|),$$

$$f_{10}(x) = \exp(-\sqrt{x+3}), \; f_{11}(x) = \ln(\frac{x}{1-x}), \quad f_{12}(x) = \ln(\sqrt{1-x^2}).$$

   Determinare in quali punti sono continue, in quali sono derivabili, gli eventuali punti angolosi, le cuspidi e i punti a tangente verticale.

6. Dimostrare che fra tutti i triangoli isosceli di assegnata area A ne esiste uno di perimetro minimo. Ne esiste uno di perimetro massimo?

7. Dimostrare che fra tutti i triangoli isosceli di assegnato perimetro $2p$ ne esiste uno di area massima. Ne esiste uno di area minima?

8. Determinare limiti continuita' ed esistenza di massimo a minimo delle funzioni il cui grafico si e' disegnato negli esercizi relativi alla seconda e terza settimana.

9. Determinare dominio, segno, eventuali asintoti orizzontali e verticali, intervalli di crescenza e decrescenza, eventuali punti a tangente orizzontale o verticale delle seguenti funzioni

$$(x^3-9x)(x^2+2x+1), \quad x^3-2x^2+x-1, \quad \frac{x^3}{x+7}, \quad x^3-2x-1, \quad \frac{x}{x^2+7}$$

$$\frac{x^4}{x^2+7}, \quad \frac{-x^2}{x^4+7}, \quad \frac{x^2-2x+3}{x+7}, \quad \frac{x+7}{x^2-2x+3}$$

Disegnarne il grafico e determinare quale di queste funzioni ammette massimo o minimo, in caso affermativo determinare i punti di massimo e minimo. Determinare inoltre quale delle precedenti funzioni ammette massimo o minimo sull'intervallo $[-3,1]$

10. Dopo aver disegnato il grafico delle funzioni contenute nei precedenti esercizi, stabilire quali di esse ha massimo o minimo e quale sia la loro immagine. Inoltre determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, quante sono le intersezioni fra il grafico di ogni funzione e la retta $y = k$.

11. Determinare al variare di $A \in \mathbb{R}$, il minimo (massimo), se esiste, della funzione

$$p(x) = 2(x + \frac{A}{x})$$

sulla semiretta $(0, \infty)$ e sulla semiretta $[0, \infty)$. Osservare che se $A > 0$, la funzione indica il perimetro di un rettangolo di area fissata.

12. Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{3x^2 - 9}}$

a. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali.

b. La funzione è pari, dispari, periodica?

c. Determinare i punti in cui la funzione è continua.

d. Spiegare perché, dopo aver risposto ai precedenti quesiti, posso affermare che f ammette massimo e minimo.

e. Determinare i punti in cui f è derivabile e gli eventuali punti singolari.

f. Determinare, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico nei punti di ascissa $x = -5, \sqrt{3}, 2$.

g. Spiegare, da un punto di vista teorico, come si possono trovare il massimo e il minimo della funzione e calcolarli. Determinare i punti di massimo e di minimo della funzione.

h. Disegnare il grafico di f

Sia $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $x \mapsto \left|\sqrt{x - \sqrt{3x^2 - 9}} - 1\right|$

A. Usando il grafico di f disegnare il grafico di g

B. Determinare l'immagine di g

C. Determinare i punti angolosi di g e le tangenti destre e sinistre in tali punti

D. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione

$$g(x) = k$$

13. Data la funzione $f(x) = \tan(\sqrt{x})$, detetminarne il dominio e l'insieme dei punti in cui e' derivabile. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(\pi^2/9, f(\pi^2/9))$

14. Disegnare il grafico di $f(x) = \arctan(2x)$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(\sqrt{3}/2, f(\sqrt{3}/2))$

15. Determinare il dominio e disegnare il grafico di $f(x) = x^{x-1}$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(1, f(1))$

16. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = (\cos(x))^x.$$

Determinare la retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0, f(0))$

17. Disegnare il grafico di $f(x) = -2\ln\left(x^3 - 5\right) + 3x$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(6, f(6))$.

18. Spiegare perche' possiamo affermare che esiste un rettangolo di area massima inscritto in un cerchio di raggio 3. Calcolare tale area.

19. Enunciare il teorema di Weierstrass (esistenza di massimi e minimi di funzioni continue) e spiegare come si possono trovare i punti di massimo e di minimo. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x) = |x^3 - 3|$ nell'intervallo $[0, 5]$.

20. Disegnare il grafico di $f(x) = |x^4 - 16|$. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione nell'intervallo $[-1, 5]$.

21. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x) = (x-1)^2 - 4\ln(x-1)$ nell'intervallo $\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, 5\right]$

22. A partire dal grafico di $\exp(x)$ (che deve essere noto), mediante traslazioni e simmetrie, disegnare il grafico di $f(x) = |e^x - 1|$. Determinare il massimo e il minimo della funzione nell'intervallo $[-1, 1]$

23. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ numero e segno delle soluzioni dell'equazione

$$e^{-(x-3)^2} = k$$

24. Dare la definizione di

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$$

Disegnare il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[-1, 1]$ che ha la precedente proprietá ma non ha limite per $x \to 0$