Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica 1
Esercizi relativi alla quarta settimana di lezione dell'A.A. 2005/06
Limiti e continuità

1. Fare tutti gli esercizi del Cap.4 del testo

2. Fare tutti gli esercizi del Cap.5 del testo di esercizi

3. Considerare le funzioni degli esercizi relativi alla prima settimana di lezione di cui si e' disegnato il grafico. Di esse determinare: estremo inferiore, superiore e gli eventuali massimi e minimi assoluti. Determinare inoltre i limiti per x che tende agli estremi degli intervalli di definizione e in quali insiemi sono continue.

4. Usando i concetti di traslazione e cambio scala disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

   e calcolarne i limiti per x che tende a ± 1 e $\pm\infty$

5. Delle seguenti funzioni si disegni il grafico e si determinino gli eventuali asintoti orizzontali e verticali

$$\arcsin(x+5) - \pi/4, \quad |\arcsin(x+5) - \pi/4|, \quad \ln(x-1)+1, \quad |\ln(x-1)+1|$$

$$\cos(\pi(x+1)), \quad |\cos(\pi(x+1))|, \quad \arctan(x-1) - \pi/2, \quad |\arctan(x-1) - \pi/2|$$

6. Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni delle seguenti equazioni

$$\arccos(x-5) - \pi/4 = k, \quad (x-1)^2 - 1 = k$$

7. Disegnare il grafico della seguente funzione, calcolarne i limiti per x che tende a ± 1 e $\pm\infty$ e dedurne l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali e discontinuita'

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & x < -1 \\ \arccos(x) & x \in [-1, 1] \\ \arctan(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

8. Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, per tutte le funzioni f definite nei precedenti esercizi

9. Date le funzioni $f : x \mapsto n \in \mathbb{Z}, \forall x \in (n-1, n]$, $g : x \mapsto n \in \mathbb{Z}, \forall x \in [n, n+1)$, disegnarne il grafico e determinare al variare di $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to n^\pm} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to n^\pm} g(x)$$

10. Sia $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$. Calcolare al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \lim_{x \to 0} f(x)$$

11. Sia $f(x) = \frac{ax^3+x^2+1}{bx^4+cx^3+x}$. Calcolare al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 0} f(x)$$

12. Determinare il segno delle seguenti funzioni trovandone il dominio, gli zeri e usando il teorema dei valori intermedi

$$(x^3 - 9x)(x^2 + 2x + 1), \quad x\cos(x), \quad \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x - 4}$$

13. Usando le proprieta' delle funzioni continue ed il concetto di limite dimostrare che l'equazione

$$\frac{x^{37} + +3x^{10} + 1}{x^2 + 1} = k$$

ammette soluzione per ogni $k \in \mathbb{R}$

14. Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni risultano continue su tutto $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x + 5 & x \leq 3 \\ x + a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x/a + 5 & x \leq 3 \\ x + a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos(ax) & x \leq 0 \\ \sin(x + a) & x > 0 \end{cases},$$

15. Siano date le funzioni definite da

$$f_1(x) = \sqrt{x+3} - 5, \; f_2(x) = \frac{x}{1-x}, \quad f_3(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f_4(x) = \left|x^3 - 1\right| + 3, \quad f_5(x) = \left|x^2 - 3x - 4\right|, \quad f_6(x) = 2^{-|x+1|}$$

a. Usando i grafici delle funzioni elementari, i concetti di traslazione, simmetria e la definizione di valore assoluto, disegnarne i grafici

b. Usando i grafici disegnati determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero (e possibilmente il segno) delle soluzioni delle equazioni

$$f_i(x) = a \quad \text{per} \quad i = 1 \ldots 6$$

c. Usando i grafici disegnati determinare, se esistono, i massimi e i minimi assoluti delle precedenti funzioni. Nel caso non esistano determinarne inf e sup

d. Usando i grafici disegnati determinare, se esistono, i massimi e i minimi delle precedenti funzioni sugli intervalli $[-2, 2]$, $(-2, 2)$, $[0, 3]$, $[0, 3)$