Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile - Anno accademico 2005-2006
Prove scritte del gennaio 2006

ATTENZIONE: alcuni esercizi sono relativi ai programmi di anni accademici precedenti

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

1. A partire dal grafico di $x \mapsto \arctan(x)$, che deve considerarsi noto, disegnare il grafico della funzione definita da

$$f(x) = |\arctan(x) + \pi/4|$$

indicando sul grafico le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali e verticali. Inoltre a partire dal grafico rispondere ai seguenti quesiti.

   (a) Determinare gli eventuali punti angolosi di f e le tangenti in tali punti.

   (b) Determinare l'area della parte limitata di piano compresa fra il grafico di f, l'asse x e le rette verticali $x = -1$ e $x = -30$.

   (c) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di f.

   (d) Determinare il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

   (e) Stabilire, usando la definizione, se converge l'integrale improprio

$$\int_{-1}^{-\infty} f(x)dx$$

2. Stabilire, usando la definizione, se la serie

$$\sum_{n\geq 1} a^n$$

converge, diverge o è indeterminata. Applicare il risultato ottenuto per determinare il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1} (-3)^n \,.$$

3. Disegnare nel piano complesso il numero $w = -3 + 4i$ e rispondere ai seguenti quesiti.

   (a) Determinare modulo e argomento principale di w.

   (b) Determinare le soluzioni dell'equazione

$$z^3 = w\,.$$

4. A partire da polinomi di MacLaurin noti, determinare il polinomio di MacLaurin di grado 2 della funzione

$$f(x) = \ln 1 + e^x - \sqrt{1+x}\,.$$

5. Disegnare il grafico della funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x < 0 \\ \arctan(x) & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

e rispondere ai seguenti quesiti.

   (a) Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione definita da

   $$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$

   determinando crescenza, decrescenza, convessità concavità ed eventuali punti di discontinuità e singolari.

   (b) Descrivere in termini di aree il valore $F(1)$

   (c) Descrivere in termini di aree il valore $F(x)$ per ogni $x \in D_F$

   (d) Determinare l'esistenza di asintoti verticali ed orizzontali, mettendoli in relazione con gli opportuni integrali impropri.

   (e) Calcolare $F(x)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Disegnare il grafico del precedente polinomio vicino a 0 e dedurne se la funzione ha un massimo o un minimo locale in 0

6. Definire la seguente uguaglianza

$$\sum_{n\geq 1} a_n = 7$$

e determinare, usando la definizione, il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1} (-1/2)^n\,.$$

7. Usando l'approssimazione di Taylor determinare, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{(cos(x)-1)^7}{\ln(1+x)^{15}}$$

8. A partire dal grafico di $x \mapsto \ln(x)$, che deve considerarsi noto, disegnare il grafico della funzione definita da

$$f(x) = |\ln(x+1) - 4|$$

indicando sul grafico le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali e verticali. Inoltre a partire dal grafico rispondere ai seguenti quesiti.

(a) Determinare gli eventuali punti angolosi di f e le tangenti in tali punti.

(b) Determinare l'area della parte limitata di piano compresa fra il grafico di f, l'asse x e le rette verticali $x = -1$ e $x = -30$.

(c) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di f.

(d) Determinare il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(e) Stabilire, usando la definizione, se converge l'integrale improprio

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx$$

9. Stabilire, usando la definizione, se la serie

$$\sum_{n\geq 1} (x)^n$$

converge, diverge o è indeterminata, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Applicare il risultato ottenuto per determinare, al variare di $x \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{\sin(x)}{3}\right)^n .$$

10. Indicare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge diverge o è indeterminata la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

e dimostrarlo usando gli integrali impropri.

11. Spiegare perchè la serie

$$\sum_{n\geq 1} (\arccos(x))^n$$

non può essere indeterminata per nessun valore di $x \in [-1, 1]$

12. Enunciare e spiegare il significato geometrico del teorema della media (di Lagrange).

13. Disegnare il grafico della funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{x^2+1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \tag{2}$$

e rispondere ai seguenti quesiti.

(a) Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione definita da

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$

determinando crescenza, decrescenza, convessità concavità ed eventuali punti di discontinuità e singolari.

(b) Descrivere in termini di aree il valore $F(1)$

(c) Descrivere in termini di aree il valore $F(x)$ per ogni $x \in D_F$

(d) Determinare l'esistenza di asintoti verticali ed orizzontali, mettendoli in relazione con gli opportuni integrali impropri.

(e) Calcolare $F(x)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$.

14. Definire cosa significa che la serie

$$\sum_{n\geq 1} a_n$$

converge diverge o è indeterminata.

15. stabilire al variare di $x \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1} (2\sin(x))^n$$

e calcolarne la eventuale somma.

16. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo sulla relazione fra derivazione e integrale di Riemann orientato.