Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2005-2006 - 060916

1. Data la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$, definire il significato di: "la serie converge", "la serie diverge", "la serie è indeterminata".

   Usando la precedente definizione, stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie e calcolarne la somma

   $$\sum_{n\geq 1} (\ln(x))^n \tag{1}$$

   Rispondere inoltre ai seguenti quesiti motivando le risposte

   (a) La precedente serie (1) è a termini positivi?

   (b) Enunciare il criterio del rapporto per le serie a termini positivi ed applicarlo, ove possibile, alla precedente serie (1)

   (c) Enunciare il criterio della radice per le serie a termini positivi ed applicarlo, ove possibile, alla precedente serie (1)

2. A partire dal grafico di $x \mapsto \arcsin(x)$, che deve ritenersi noto, disegnare il grafico della funzione definita da

   $$f(x) = |\arcsin(x+1)| - 1/2$$

   e spiegare perché tale funzione è continua.

   (a) Rispondere, a partire dal grafico, alle seguenti domande

      i. Determinare le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali e verticali

      ii. Scrivere esplicitamente $f(x)$ come funzione definita a tratti

      iii. Determinare eventuali punti angolosi e a tangente verticale e le tangenti in tali punti

   (b) Calcolare $\int_{-2}^{0} f(x)\, dx$ e interpretarlo in termini di aree.

   (c) Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$ specificando il dominio e l'esistenza di asintoti.

   (d) Verificare, usando le proprietà dell'integrale e il teorema fondamentale del calcolo, che F appartiene a $C^1([-2,0],\mathbb{R})$ ma non a $C^2([-2,0],\mathbb{R})$

3. Definire il simbolo $f(x) = o(g(x)$ per $x \mapsto \infty$ e applicare la definizione per stabilire se la seguente affermazione è corretta

   $$e^{-x} = o(1/x^{1235}) \text{ per } x \mapsto \infty\,.$$

4. Descrivere, in base alla teoria studiata come può essere determinato il massimo e il minimo di una funzione continua su un intervallo limitato e chiuso.