Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile - Anno accademico 2005-2006
Prove scritte di dicembre

Prova 1

1. Dire cosa significa che la serie
$$\sum_{n\geq 1} a_n \tag{1}$$
converge, diverge o è indeterminata

2. Data una funzione reale f di variabile reale, sotto quali condizioni posso considerare l'integrale improprio
$$\int_4^{\infty} f(x)\, dx\,? \tag{2}$$

3. Dire cosa significa che l'integrale improprio (2) converge o diverge.

4. Ponendo nella serie (1) $a_n = (3x)^n$, determinare, usando la definizione, per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.

5. Ponendo nell'integrale (2) $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, determinare, usando la definizione, per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale converge.

6. Usando la definizione di convergenza di integrale improprio e l'interpretazione geometrica della serie armonica generalizzata, determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Prova 2

1. Dire cosa significa che la serie
$$\sum_{n\geq 1} a_n \tag{3}$$
converge, diverge o è indeterminata

2. Ponendo nella serie (3) $a_n = (\sin(3x))^n$, determinare, usando la definizione, per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.

3. Dimostrare che la serie armonica $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, usando la definizione di divergenza di integrale improprio e l'interpretazione geometrica delle somme parziali.

4. Sia $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ una funzione $C^\infty([-2, 3])$ tale che $f(-2) < 0$, $f(3) > 0$, la derivata prima si annulla solo in $x = 0$ e la derivata seconda è sempre negativa. Dedurre che f si annulla una sola volta, che ha massimo in $x = 0$ e minimo in $x = -2$.

Prova 3

1. Disegnare il grafico della funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & \text{se } x < 0 \\ \arcsin(x) & \text{se } x \in [0, 1] \end{cases} \tag{4}$$

2. Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico della funzione definita da

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt$$

   determinando crescenza, decrescenza, convessità concavità ed eventuali punti di discontinuità e singolari.

3. Descrivere in termini di aree il valore $F(1)$

4. Calcolare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$

Prova 4

1. A partire dal grafico di $x \mapsto \arctan(x)$, che deve considerarsi noto, disegnare il grafico della funzione definita da

$$f(x) = \arctan(x - 5) + \pi/2 \tag{5}$$

2. Determinare l'area della parte limitata di piano compresa fra il grafico di f e la retta congiungente i punti $(5, f(5))$ e $(6, f(6))$.

3. Determinare l'equazione della tangente al grafico di f nel punto $(6, f(6))$.

4. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di f e di f ristretta all'intervallo $[0, 7]$.

5. Spiegare perché l'integrale improprio $\displaystyle\int_{5}^{-\infty} f(x)\, dx$ o converge o diverge a $-\infty$ e calcolarlo mediante la definizione

6. Determinare, usando la definizione, il carattere della serie

$$\sum_{n \geq 1} (-2x)^n$$

   al variare di $x \in \mathbb{R}$

Prova 5

1. Usando la definizione, stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie e calcolarne la somma
$$\sum_{n\geq 1}(3\sin(x))^n$$

2. Disegnare il grafico della funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 0 \\ \arctan(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases},$$
calcolare
$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$$
e interpretarlo in termini di aree.

Prova 6

1. A partire dal grafico di $x \mapsto \ln(x)$, che deve considerarsi noto, disegnare il grafico della funzione definita da
$$f(x) = ||\ln(x-5)| - 1|$$

2. Determinare l'area della parte limitata di piano compresa fra il grafico di f, l'asse x e le rette verticali $x = 20$ e $x = 30$.

3. Determinare gli eventuali punti angolosi di f.

4. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di f.

5. Determinare il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

6. Stabilire, usando la definizione, se converge l'integrale improprio
$$\int_{5+1/e}^{5} f(x)dx$$

7. Stabilire, usando la definizione, se converge la serie
$$\sum_{n\geq 0}(-2)^n$$