Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica 1

Lezioni A.A. 2004/2005 , prof. G. Stefani
secondo semiperiodo 22/11/04-22/01/05

Testo consigliato: Robert A. Adams - Calcolo differenziale 1 - Casa Editrice Ambrosiana

1 25-26/11.

Gli argomenti della prima settimana si trovano nel capitolo *Integrazione*.

Giovedi' 25/11
1. Il simbolo di sommatoria $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ e le sue proprieta':

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) + g(k) = \sum_{k=m}^{n} f(k) + \sum_{k=m}^{n} g(k), \quad \sum_{k=m}^{n} af(k) = a \sum_{k=m}^{n} f(k), \forall a \in \mathbb{R}$$

Esempi:

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n\,, \quad \sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2\,, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad x \neq 0, 1$$

2. Il problema del calcolo delle aree. Somme di Riemann per le funzioni continue su intervalli limitati. L'integrale di Riemann (sul testo chiamato integrale definito) per le funzioni continue: definizione e significato geometrico in termini di area.
3. Il caso delle funzioni limitate e non continue. Integrabilita' delle funzioni continue a tratti (senza dimostrazione). L'integrale orientato e suo significato geometrico in termini di area. Esercizi.
Venerdi' 26/11
4. Proprieta' dell'integrale: linearita', additivita' rispetto all'intervallo e integrale delle funzioni continue a tratti, monotonia, disuguaglianza triangolare detta in alcuni testi continuita' (senza dimostrazione ma con significato geometrico).
Teorema del valor medio per le funzioni continue (con dimostrazione).
Esercizio. Calcolare usando il significato geometrico e le proprieta' dell'integrale:

$$\int_{-4}^{1} (2+x)\,dx, \; \int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx, \; \int_{-3}^{3} \sqrt{18-2x^2}\,dx, \; \int_{-1}^{3} 2+\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

5. Teorema fondamentale del calcolo: parte prima sulla relazione fra integrale di Riemann orientato e derivazione (enunciato e dimostrazione).
6. Studio del grafico delle funzioni integrali

$$x \mapsto \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt \quad \text{e} \quad x \mapsto \int_{-1}^{x} \frac{1}{t} dt$$

2 2-3/12.

Gli argomenti della seconda settimana di lezione si trovano nei capitoli *Integrazione*, *tecniche di integrazione* e, per quanto riguarda le primitive, nel paragrafo *Antiderivate e problemi ai valori iniziali* del capitolo *Derivazione*.

Giovedi' 2/12
7. Primitive, antiderivate e integrale indefinito.
Attenzione: sul testo non si usa il termine primitiva, ma antiderivata; va comunque

sottolineato che l'antiderivata e' associata ad un intervallo. Inoltre, invece di *integrale indefinito su un intervallo* I, io preferisco usare *insieme delle primitive su* I.
Struttura delle antiderivate su intervalli, equazioni differenziali e problemi ai valori iniziali.
8. Enunciato e dimostrazione della seconda parte del Teorema fondamentale del calcolo (detta in alcuni testi formula fondamentale del calcolo).
Esercizio da svolgere a casa: leggere la tabella delle derivate in maniera da calcolare le soluzioni dell'equazione differenziale $f'(x) = g(x)$, con g funzione opportuna; fare particolare attenzione agli intervalli su cui si puo' definire f.
9. Area compresa fra i grafici di due funzioni. Esempi.
Le funzioni $x \mapsto \ln(x)$ e $x \mapsto \ln(-x)$ come funzioni integrali. Una definizione del numero e come soluzione dell'equazione $\ln(x) = 1$.
Venerdi' 3/12
10. Integrale di funzioni pari e dispari, indipendenza rispetto alle traslazioni orizzontali. Calcolo delle primitive: primitiva della somma, calcolo di una primitiva di $x \mapsto f(ax)$ e $x \mapsto f(a+x)$, nota una primitiva di f.
11. Differenziale di una funzione come approssimazione dell'incremento. Regola di integrazione per parti e per sostituzione (cambiamento di variabile per gli integrali). Regole pratiche mediante l'uso del differenziale. Esempi:

$$\int x\cos(x)\,dx,\ \int xe^x\,dx,\ \int \cos(3x)\,dx,\ \int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx,\ \int x\sqrt{1-x^2},\ \int x\sqrt{1+x^2}$$

12. Esercizi.

3 9-10/12.

Gli argomenti della terza settimana di lezione si trovano nei capitoli *Derivazione*, *Alcune applicazioni delle derivate* e *Tecniche di integrazione.*

Giovedi' 9/12
13. Caduta dei gravi.
14. Regole di de l'Hopital (senza dimostrazione) per il calcolo dei limiti. Confronto fra la crescita di esponenziali, logaritmi e potenze per $x \to \pm\infty$.
15. Esercizi
Venerdi' 10/12
16. Lezione tenuta dalla Prof.. Poggiolini: integrale delle funzioni razionali
17. Lezione tenuta dalla Prof. Poggiolini: esercizi sugli integrali
18. Lezione tenuta dalla Prof. Poggiolini: esercizi sugli integrali

4 16-17/12

Nella quarta settimana di lezione saranno svolti esercizi sugli integrali e verra' introdotta l'approssimazione di Taylor (capitolo 4, paragrafo 8)

Giovedi' 16/12
19. Lezione tenuta dalla Prof. Poggiolini: polinomio di Taylor.
20. Lezione tenuta dalla Prof. Poggiolini: esercizi.
21. Lezione tenuta dalla Prof. Poggiolini: esercizi.
Venerdi' 16/12
19. Lezione tenuta dalla Prof. Poggiolini: approssimazione di Taylor col resto in forma di Lagrange e di Peano (notazione O).
20. Lezione tenuta dalla Prof. Poggiolini: esercizi.
21. Lezione tenuta dalla Prof. Poggiolini: esercizi.

5 13-14/01/05.

Gli argomenti di questa settimana di lezione si trovano nel paragrafo 4.8 del capitolo *Alcune applicazioni delle derivate* e nei paragrafi 9.7 e 9.9 del capitolo *Successioni e serie.* Per gli argomenti contenuti nel capitolo 9, sostituire nel testo *polinomio di Taylor o Maclaurin* a *serie di Taylor o Maclaurin*

Giovedi' 13/01
22. Polinomio di Taylor e approssimazione: massimi e minimi locali, convessita' e concavita' locale. Esempi.
23. Uso della notazione O per il calcolo dei polinomi di Taylor delle funzioni composte.
24. Parte principale di una funzione per $x \to x_0$ (**sul testo non e' definita**)
Definizione 1. Una funzione f si dice infinitesima in x_0 o per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Si noti che le funzioni infinitesime in x_0 possono essere estese per continuita' a x_0.
Definizione 2. Sia f una funzione continua in x_0, $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ e $r \in \mathbb{R},\ r \geq 0$. Si dice che $a(x - x_0)^r$ e' la parte principale di f per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{a(x - x_0)^r} = 1$$

Se $r > 0$, si dice anche che f e' un infinitesimo di ordine r per $x \to x_0$.
Analoghe definizioni si danno per $x \to x_0^{\pm}$.
Osservazioni.

- Non tutte le funzioni infinitesime hanno parte principale, ad esempio $x \ln(x)$ e $\exp(-1/x^2)$ per $x \to 0$.
- $(f(x) - f(x_0))$ e' infinitesima in x_0, la sua parte principale, quando esiste, esprime la maniera di andare a 0 dell'incremento, determina l'andamento del grafico vicino a x_0 e quindi indica se ci sono massimi o minimi locali e flessi a tangente orizzontale.
- Se $f \in C^\infty$ in un intorno di x_0 ed ha parte principale per $x \to x_0$, allora la sua parte principale (se esiste) e' il primo termine non nullo di ogni polinomio (non nullo) di Taylor centrato in x_0. Si noti che $\exp(-1/x^2)$ e' una funzione C^∞ che ha tutte le derivate in 0 uguali a 0.

Venerdi' 14/10
25. Uso della parte principale per il calcolo dei limiti delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$
26. Uso del Teorema di Taylor per il calcolo della potenza del binomio e simboli binomiali, Esempio 1 del Paragrafo 9.9 pg.603. Polinomio di Taylor centrato in $x = 0$ di $(1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, serie binomiale Paragrafo 9.9 pg.604.
27 Esercizi:

1. uso del Teorema di Taylor per il calcolo in $x = 0$ delle derivate di $\sin(x)/x$
2. calcolo del polinomio di Taylor di $1/(1 - x)$ a partire da quello di $1/(1 + x)$
3. calcolo del primo termine del polinomio di Taylor di $\tan(x)$ a partire da quelli di $\sin(x)$ e $\cos(x)$. Per esercizio: calcolo dei termini fino al grado 3

6 20-21/01/05.

Lezioni 28-33. Esercizi di ricapitolazione