Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica 1
Lezioni A.A. 2004/2005 , prof. G. Stefani
primo semiperiodo 20/9/04-6/11/04
Testo consigliato: Robert A. Adams - Calcolo differenziale 1 - Casa Editrice Ambrosiana

Il registro delle lezioni contiene gli argomenti svolti a lezione ed alcuni suggerimenti su come usare il testo. Occasionalmente saranno proposti esercizi. Se non specificato altrimenti, i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono al testo consigliato, terza edizione. Altri esercizi saranno proposti in un file a parte nella sezione *Materiale didattico* della pagina web del corso.

Alcuni testi su cui si trovano i **prerequisiti**:
M. Roggero, G. Ferrarese - Matematica Zero, Corso di sopravvivenza matematica con esercizi commentati e risolti, Casa Editrice Ambrosiana
G. Malafarina - Matematica per i precorsi, McGraw-Hill
G. De Marco - ANALISI ZERO, Decibel editrice, distribuzione Zanichelli

1 23-24/9.

Gli argomenti della prima settimana si trovano nel capitolo *Preliminari*, ad eccezione della funzione inversa che si trova nel capitolo *Le funzioni trascendenti*

giovedi' 23/9
1. Spiegazioni sullo svolgimento del corso.
Prerequisiti al corso sono stati svolti nel precorso di matematica svoltosi in settembre e si trovano anche nei paragrafi P.1, P.2, P.3, P.6 del capitolo *Preliminari* e nel paragrafo 3.2 del capitolo *Le funzioni trascendenti.* Porre particolare attenzione alle proprieta' del valore assoluto, alle equazioni e disequazioni di primo e secondo grado e razionali, alle formule di trigonometria e alle proprieta' di logaritmi ed esponenziali.
Numeri reali, naturali o interi positivi, interi, razionali e notazioni insiemistiche

$$x \in \mathbb{R},\ \mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q}$$

La retta reale. Proprieta' di ordine $(<, \leq)$ e di completezza dei numeri reali.
Esempi: $\sqrt{2}, \pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$
2. Valore assoluto e distanza, intervalli (limitati, illimitati, aperti, chiusi, semiaperti) e loro estremi. **Attenzione:**

sul testo gli intervalli con estremi reali sono detti **finiti**, noi li chiameremo **limitati**

Lunghezza o misura di un intervallo limitato e sua rappresentazione in termini di distanza.
Esercizio: trovare centro (punto medio) e raggio di un intervallo limitato (a, b).
Rappresentazione grafica di intervalli e soluzioni di disequazioni e sistemi di disequazioni.
Esempi:

$$|x+4| < |x-3|,\ x^2 - 4 < 0,\ x^2 \geq 8,\ x^2 \geq -5,\ x^2 \leq -5$$

3. Funzioni: definizione, notazione $f : A \to B\ ,\ x \mapsto f(x)$, dominio, codominio, immagine.
Funzioni reali di una variabile reale: grafici, **convenzione sul dominio**.
Venerdi' 24/9
4. Composizione di funzioni. **Esercizio:** date $f : x \mapsto x^3,\ g : x \mapsto x - 1,\ h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$, calcolare $f \circ g,\ g \circ f, h \circ h$, specificando il dominio. Vari esempi
5. La funzione inversa: definizione e proprieta' (paragrafo 3.1). Relazione fra il grafico di una funzione e quello della sua inversa, simmetria rispetto alla retta di equazione $y = x$.
Attenzione:

Molti autori chiamano **iniettiva** o **biunivoca sull'immagine** o **1-1** una funzione f che il testo chiama biunivoca.

Invertibilita' di una funzione e soluzione di equazioni. Vari esempi. **Esercizio:** x^3, $\sqrt[3]{x}$ e x^2, $\sqrt{x}$, determinare i domini in cui le funzioni sono una l'inversa dell'altra!! **Esercizio proposto:** studiare l'invertibilita' della funzione $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ nell'intervallo $(1, \infty)$.
6. Grafici e proprieta' di alcune funzioni *elementari*:

$$mx + q, \ c, \ |x|, \ x^n, \ \sqrt[n]{x}, \ \frac{1}{x^n}, \ \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

Funzioni pari, dispari, esempi: x^{2n}, x^{2n+1}. Simmetrie rispetto agli assi. Relazione relazione fra i grafici delle funzioni

$$f(x), \ -f(x), \ |f(x)|$$

2 30/9-1/10.

Gli argomenti della seconda settimana di lezione si trovano nei capitoli *Preliminari* e *Le funzioni trascendenti*

Giovedi' 30/9
7. (Paragrafo P.6.) Misura dell'angolo in radianti. Le funzioni $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$ e i loro grafici. Funzioni periodiche. **Riguardare:** le relazioni fra le funzioni trigonometriche e le soluzioni delle equazioni trigonometriche.
8. (Paragrafo 3.5) Le funzioni trigonometriche inverse e i loro grafici

$$\arcsin(x), \ \arccos(x), \ \arctan(x)$$

Ricordare che: $2 \arcsin(1) = \pi = 3.141592654....$
Esercizio: determinare il dominio delle funzioni

$$\sqrt{2\cos(x) + 1}, \ \sqrt{2\cos(x) \pm 4}, \ \sqrt{\frac{1}{|\tan(x)|}}, \ \sqrt{\frac{x + \sin(\pi x)}{\sqrt{1 - x^2}}}, \ \arcsin(x^2 - 1), \ \arctan(\frac{1}{x})$$

9. Polinomi e funzioni razionali. **Riguardare:** divisione fra polinomi e **teorema** e regola di Ruffini.
Operazioni fra funzioni: somma, differenza, prodotto e quoziente. Funzioni definite a tratti (paragrafo P.5), esempi: il valore assoluto, la funzione segno, la funzione parte intera (floor).
Attenzione: in alcuni testi $\mathrm{sgn}(x)$ e' definita anche in 0, cioe'

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} x/|x| & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Noi specificheremo sempre quale definizione usiamo.
Cambio di scala e traslazione di un grafico (paragrafi P.3,4). Esempi di grafici di funzioni deducibili da quelli delle funzioni elementari: esercizi

$$(x-2)^2 - 1 \ , \qquad \frac{x}{1-x} = -\frac{x - 1 + 1}{x - 1} = -1 - \frac{1}{x-1}$$

Esercizio: usando i concetti di cambio scala, traslazione e simmetria disegnare i grafici delle seguenti funzioni a partire da grafici noti

$$\sqrt{1-x} + 1, \ \sin(|x|)\,, \ |\sin(x)|\,, \ \sin(\pi x)\,, \ |\arcsin(x/\pi)|, \ 2\arctan(|x|) - 2$$

Venerdi' 1/10
10. (Paragrafi 3.2,3.) Funzioni esponenziali e logaritmiche e loro grafici. Il numero

$$e = 2.7182818459045.....$$

Le funzioni

$$\exp(x) = e^x, \ \ln(x) = \exp^{-1}(x)$$

11. Studio delle funzioni del tipo $x \mapsto g(x)^{f(x)}$ mediante l'uguaglianza

$$g(x)^{f(x)} = \exp(f(x)\ln(g(x))) = e^{f(x)\ln(g(x))}$$

Esercizi: calcolare il dominio delle funzioni

$$\ln(x)^{\arcsin(x)}, \quad \arcsin(x)^{\ln(x)}$$

12. Le funzioni sinh e cosh. Esercizi.

3 4-8/10.

Gli argomenti della terza settimana di lezione si trovano nel capitolo *Limiti e continuita'*

Lunedi' 4/10
13. (Paragrafo 1.5 e 1.2 per una definizione informale) Il procedimento di limite. Limite destro e sinistro di funzioni definite su intervalli: definizione intuitiva e formale, esempi.

$$\lim_{x\to 0^\pm} \mathrm{sgn}(x) = \pm 1, \quad \lim_{x\to n^\pm} [x].$$

$$\lim_{x\to a^\pm} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^\pm} f(x) - L = 0.$$

Limite di funzioni definite su intervalli e sua relazione con i limiti destro e sinistro. Esempi:

$$\lim_{x\to a} c = \lim_{x\to a^\pm} c = c, \quad \lim_{x\to a^\pm} x \lim_{x\to a^\pm} x = a$$

Esercizi:

$$\lim_{x\to a} x^2 = a^2, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}, \quad \lim_{x\to n^\pm} [x], \quad \lim_{x\to 0^+} \sin(\frac{1}{x})$$

14. (Paragrafo 1.5 e 1.3 per una definizione informale) Limiti infiniti e all'infinito, asintoti orizzontali e verticali. Esempi: $1/x^n$, $\sin(x)$
Attenzione: in alcuni testi si distingue fra $+\infty$ e ∞, noi, seguendo il testo, faremo la seguente

convenzione: $\infty = +\infty$

Giovedi' 7/10
15. Localizzazione del limite, cioe' dipendenza del valore limite solo dai valori della funzione " vicini ad a ", piu' precisamente dai valori che la funzione assume in intorno (destro, sinistro) arbitrario di a, a escluso. Unicita' del limite. Limite grafico di funzioni definite a tratti.
16. (Paragrafo 1.2) Proprieta' dei limiti (senza dimostrazione): unicita', compressione (teorema dei carabinieri), permanenza del segno e monotonia.
Esercizio: verificare che $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$

17. Regole per il calcolo dei limiti (senza dimostrazione): somma, prodotto, quoziente, radice, vedi le tabelle nel file **Operazioni con i limiti** che si puo' scaricare dal **Materiale didattico**. Limiti di polinomi e delle funzioni razionali.
Venerdi' 7/10
18. Funzioni continue in un punto e in un intervallo. Funzioni continue a destra e a sinistra. Teorema di permanenza del segno per le funzioni continue.
19. Continuita' e limiti delle funzioni elementari (senza dimostrazione) Continuita' delle funzioni definite a tratti.
20. Costruzione di funzioni continue: somma, prodotto, quoziente, composizione.

4 14-15/10.

Gli argomenti di questa settimana di lezione si trovano nel paragrafo 1.4 del capitolo *Limiti e continuita'*

Giovedi' 14/10
21. Estensioni continue e discontinuita' rimovibili. Esempi:

$$\frac{x^2-1}{x-1}\ ,\ \frac{\sin(x)}{x},\ x\sin(1/x)$$

22. Proprieta' delle funzioni continue sugli intervalli (senza dimostrazione): il teorema di Weierstrass (condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi e minimi) e il teorema dei valori intermedi (radici di equazioni). Conseguenze sul segno delle funzioni continue e sul disegno dei grafici. Esempi: esistenza di una radice reale per i polinomi di grado dispari,

$$f(x) = x\cos(x),\ (x-2)/(x^2-1)$$

23. Esercizi
Venerdi' 15/10
24 Funzioni definite su intervalli: funzioni limitate, superiormente (inferiormente) limitate, estremo superiore (inferiore), massimo (minimo), punto di massimo (minimo). Massimi e minimi sugli intervalli.
25. Esercizi: Determinare la massima (minima) area dato il perimetro $2p$ di un rettangolo non degenere

$$A = x(p-x) = -(x-p/2)^2 + p^2/4.$$

Determinare il minimo (massimo) perimetro di un rettangolo, data l'area A

$$p = 2(x+\frac{A}{x}) = 2\left((\sqrt{x}-\sqrt{\frac{A}{x}})^2 + 2\sqrt{A}\right)$$

26. Esercizi

Settimana 18-23/10/04: attivita' didattica sospesa

5 28-29/10.

Gli argomenti di questa settimana si trovano nei paragrafi 2.1-5,8 del capitolo *Derivazione* e nei paragrafi 3.1-6 del capitolo *Le funzioni trascendenti*

Giovedi' 14/10

27. La sostituzione di variabile nel calcolo dei limiti (limite della composizione).
Attenzione: Questo risultato non e' esplicitamente citato nel testo. Con le notazioni usate nella pagina *Operazioni con i limiti,* vale il seguente risultato
Siano f, g funzioni continue sugli intervalli I_f e I_g rispettivamente e sia g non costante. Se

$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = \beta \quad e \quad \lim_{x\to\beta} f(x) = \gamma$$

allora

$$\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = \gamma.$$

Questo risultato da' origine, nelle precedenti ipotesi, alla seguente regola pratica: posto $y = g(x)$, si ha

$$\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = \lim_{y\to\beta} f(y)$$

Esempio:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \lim_{y\to\infty} e^y = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0$$

28. Rapporto incrementale di una funzione in un punto e suo significato geometrico. Riflettere sulla seguente affermazione: una funzione e' continua se e solo se $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e' una forma indeterminata.

Attenzione: Il rapporto incrementale sul testo e' chiamato il rapporto di Newton.

Definizione di derivata in un punto, funzione derivata. La continuita' e' una condizione necessaria per la derivabilita', cioe' ogni funzione derivabile e' continua. Derivata e retta tangente, derivata e approssimazione lineare.
Punti singolari: punti a tangente verticale, cuspidi, punti angolosi

Attenzione: Il testo non considera le cuspidi punti a tangente verticale. Alcuni autori (ed anche io) preferiscono considerarli punti a tangente veticale, anche se "solo una semiretta si puo' considerare tangente"

29. Derivata di alcune funzioni elementari. La funzione x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ e la sua derivata: dominio, continuita', derivabilita', grafico.
Esercizio proposto: calcolare la funzione derivata di $[x]$.
Venerdi' 29/10.
30. Derivate di ordine superiore. L'insieme

$$C^n(A) = \{f : \text{esiste ed e' continua la derivata n-sima in ogni punto di } A\}$$

$$C^\infty(A) = \{f : \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste la derivata n-sima in ogni punto di } A\}$$

Attenzione: Il testo non riporta la definizione di $C^n(A)$ e di $C^\infty(A)$.

Esempi: $polinomi, \sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\tan$ e' C^∞ sul suo dominio, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $f_\alpha(x) = x^\alpha$ e' C^∞ su $(0,\infty)$. Esercizio: per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \in C^n([0,\infty))$, per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \in C^\infty([0,\infty))$?
31. Derivata di somma, prodotto, quoziente e composizione. Derivata della funzione inversa. Derivata delle funzioni elementari e delle funzioni del tipo

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ln(f(x)))$$

32. Esercizi.

6 4-5/11.

Gli argomenti di questa settimana si trovano nei paragrafi 2.6 del capitolo *Derivazione* e nei paragrafi 4.2-4 del capitolo *Alcune applicazioni delle derivate*

Giovedi' 4/11
33. I teorema di Rolle e Lagrange (o del valore medio), senza dimostrazione. Interpretazione geometrica e in termini di valutazione dell'errore. Esempio: $|\sin(x)-\sin(a)| < |x-a|$. Definizione di funzioni crescenti e decrescenti su intervalli: uso del teorema di Lagrange per ottenere una condizione sufficiente per la crescenza o decrescenza di una funzione. Esercizi proposti: disegnare i grafici di funzioni razionali.
34. Massimi e minimi assoluti o globali. Massimi e minimi relativi o locali. Il teorema di Fermat o sulla localizzazione dei massimi e minimi. Applicazione alla ricerca dei massimi e minimi assoluti: punti estremi, critici e singolari.
35. Esercizi sulla ricerca dei massimi e minimi assoluti. Esempi

$$\sqrt{1-|2x-1|}, \quad x^4 - x^3 + 1$$

Venerdi' 5/11.
36. Derivabilita' delle funzioni definite a tratti e studio dei grafici di funzioni.
37. Concavita' e convessita di una funzione su un intervallo.

> **Attenzione :** sul testo le funzioni convesse vengono chiamate con la concavita' verso l'alto e le funzioni concave con la concavita' verso il basso

38. Studio del grafico di una cubica. Altri esercizi.
Esercizi proposti: risolvere come esercizi gli esempi del paragrafo 4.5.

7 Lezioni - esercitazioni di recupero

In queste lezioni verranno fatte alcuni complementi, precisazioni e dimostrazioni. Verranno inoltre ripresi gli argomenti delle precedenti settimane che non e' stato possibile svolgere esaurientemente per mancanza di tempo. Infine verranno svolti alcuni esercizi ritenuti significativi oppure proposti dagli studenti.

Sabato 6/11.
39. Dimostrazione del Teorema di Fermat. Dimostrazione che i teoremi di Rolle e Lagrange sono equivalenti e dimostrazione del Teorema di Rolle
40. Dimostrazione che $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x = 1$. Grafico di $\sinh(x)$, $\cosh(x)$
Ricevimento studenti
Mercoledi' 10/11.
41. Enunciato del seguente risultato, con idea della dimostrazione come applicazione del teorema di Lagrange:
Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se $\lim_{x\to a} f'(x) = L \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L.$$

Cioe' f ammette derivata destra in a e $D^+f(a) = L$. Analogo risultato vale per la derivata sinistra e la derivata.
Calcolo delle derivate in 0 di $e^{-1/|x|}$.
42. Esercizi su punti angolosi, cuspidi e punti a tangente verticale.
Venerdi' 12/11. e **Lunedi' 15/11.**
Esercizi e ricevimento studenti