Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica 1
Esercizi relativi alla sesta settimana di lezione dell'A.A. 2004/05

Questi esercizi sono da considerarsi materiale aggiuntivo rispetto agli esercizi del testo, che devono comunque essere svolti.

1. Determinare dominio, segno, eventuali asintoti orizzontali e verticali, intervalli di crescenza e decrescenza, eventuali punti a tangente orizzontale o verticale delle seguenti funzioni

$$(x^3-9x)(x^2+2x+1), \quad x^3-2x^2+x-1, \quad \frac{x^3}{x+7}, \quad x^3-2x-1, \quad \frac{x}{x^2+7}$$

$$\frac{x^4}{x^2+7}, \quad \frac{-x^2}{x^4+7}, \quad \frac{x^2-2x+3}{x+7}, \quad \frac{x+7}{x^2-2x+3}$$

   Disegnarne il grafico e determinare quale di queste funzioni ammette massimo o minimo, in caso affermativo determinare i punti di massimo e minimo. Determinare inoltre quale delle precedenti funzioni ammette massimo o minimo sull'intervallo $[-3,1]$

2. Fare come esercizi gli Esempi 1-9 del Paragrafo 4.4.

3. Fare gli Esercizi 4.4 del testo.

4. Dopo aver disegnato il grafico delle funzioni contenute nei precedenti esercizi, stabilire quali di esse ha massimo o minimo e quale sia la loro immagine. Inoltre determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, quante sono le intersezioni fra il grafico di ogni funzione e la retta $y = k$.

5. Determinare al variare di $A \in \mathbb{R}$, il minimo (massimo), se esiste, della funzione

$$p(x) = 2(x + \frac{A}{x})$$

   sulla semiretta $(0, \infty)$ e sulla semiretta $[0, \infty)$. Osservare che se $A > 0$, la funzione indica il perimetro di un rettangolo di area fissata.

6. Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.
   Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{3x^2 - 9}}$

   a. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali.
   b. La funzione è pari, dispari, periodica?
   c. Determinare i punti in cui la funzione è continua.
   d. Spiegare perché, dopo aver risposto ai precedenti quesiti, posso affermare che f ammette massimo e minimo.
   e. Determinare i punti in cui f è derivabile e gli eventuali punti singolari.
   f. Determinare, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico nei punti di ascissa $x = -5, \sqrt{3}, 2$.
   g. Spiegare, da un punto di vista teorico, come si possono trovare il massimo e il minimo della funzione e calcolarli. Determinare i punti di massimo e di minimo della funzione.

h. Disegnare il grafico di f

Sia $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $x \mapsto \left| \sqrt{x - \sqrt{3x^2 - 9}} - 1 \right|$

A. Usando il grafico di f disegnare il grafico di g

B. Determinare l'immagine di g

C. Determinare i punti angolosi di g e le tangenti destre e sinistre in tali punti

D. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione

$$g(x) = k$$

7. Data la funzione $f(x) = \tan(\sqrt{x})$, detetminarne il dominio e l'insieme dei punti in cui e' derivabile. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(\pi^2/9, f(\pi^2/9))$

8. Disegnare il grafico di $f(x) = \arctan(2x)$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(\sqrt{3}/2, f(\sqrt{3}/2))$

9. Determinare il dominio e disegnare il grafico di $f(x) = x^{x-1}$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(1, f(1))$

10. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = (\cos(x))^x.$$

Determinare la retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0, f(0))$

11. Disegnare il grafico di $f(x) = -2\ln\left(x^3 - 5\right) + 3x$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(6, f(6))$.

12. Spiegare perche' possiamo affermare che esiste un rettangolo di area massima inscritto in un cerchio di raggio 3. Calcolare tale area.

13. Enunciare il teorema di Weierstrass (esistenza di massimi e minimi di funzioni continue) e spiegare come si possono trovare i punti di massimo e di minimo. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x) = |x^3 - 3|$ nell'intervallo $[0, 5]$.

14. Disegnare il grafico di $f(x) = |x^4 - 16|$. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione nell'intervallo $[-1, 5]$.

15. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x) = (x-1)^2 - 4\ln(x-1)$ nell'intervallo $\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, 5\right]$

16. A partire dal grafico di $\exp(x)$ (che deve essere noto), mediante traslazioni e simmetrie, disegnare il grafico di $f(x) = |e^x - 1|$. Determinare il massimo e il minimo della funzione nell'intervallo $[-1, 1]$

17. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ numero e segno delle soluzioni dell'equazione

$$e^{-(x-3)^2} = k$$

18. Dare la definizione di

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$$

Disegnare il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[-1, 1]$ che ha la precedente proprietá ma non ha limite per $x \to 0$