Corso di Laurea in Ingegneria Civile - A.A. 2004/05
Analisi Matematica I
Esercizi per le vacanze di Natale

I seguenti esercizi contengono anche domande-tipo, per la prova scritta d'esame

1. Svolgere come esercizi gli Esempi 7-9 del Paragrafo 5.6 del testo.
2. Svolgere come esercizi gli Esempi 1-5 del paragrafo 6.1 del testo.
3. Svolgere gli Esercizi 6.1 del testo.
4. Svolgere come esercizi gli Esempi 1-8 del paragrafo 6.2 del testo. Si possono usare anche sostituzioni diverse da quelle usate nel testo
5. Svolgere gli Esercizi 6.2 del testo non segnate da asterisco.
6. Svolgere come esercizi gli Esempi 1-3 del paragrafo 6.3 del testo.
7. Svolgere gli Esercizi 6.3 del testo in cui le funzioni integrande hanno denominatore di grado minore o uguale a 2.
8. Svolgere come esercizi gli Esempi 1-5 del paragrafo 4.7 del testo.
9. Svolgere gli Esercizi 4.7 del testo.
10. Svolgere come esercizi gli Esempi 1-4 del paragrafo 4.8 del testo.
11. Svolgere come esercizi gli esercizi 1-18 degli Esercizi 4.8 del testo.
12. Determinare il primo termine non nullo dell'approssimazione di Taylor centrata in 0 della funzione
$$\sin(x) - x + x^3/6$$
13. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + x^3/6}{x^\alpha}$$
14. Dopo aver verificato che le funzioni
$$\frac{\cosh(x) - 1}{x^2}, \quad \frac{\cosh(x) - 1}{x}$$
sono estendibili per continuita' su tutto $\mathbb{R}$, disegnarne il grafico.
15. Disegnare il grafico della funzione
$$\frac{\sinh(x) - x}{x^5}$$
16. Spiegare la relazione fra integrale orientato e area. Determinare l'area della regione di piano compresa fra l'asse x il grafico della funzione $f(x) = x\cos(2x)$ e le rette $x = 0, \quad x = \dfrac{3\pi}{4}$.
17. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 3$

18. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali di $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+5}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 2$

19. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = 4 - x^2$, e $y = (x-1)^2$.

20. Calcolare il segno della funzione $f(x) = x\cos(x/2)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione l'asse x e le rette verticali $x = -\pi/3$ e $x = \pi/2$

21. Disegnare i grafici delle funzioni $f(x) = xe^{x-2}$ e $f(x) = e^{-4}x$. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici

22. Disegnare il grafico di

$$f : x \mapsto \begin{cases} x\exp(-x) & \text{se} \quad x > 0 \\ x & \text{se} \quad x \le 0 \end{cases}$$

   (a) Spiegare perche' f ammette primitive.
   (b) Quante volte sono derivabili le sue primitive?
   (c) Disegnare il grafico della primitiva F di f tale che $F(-1) = 0$ senza calcolarla, in particolare specificare il dominio e discutere l'esistenza di massimi e minimi relativi ed assoluti e di asintoti verticali e orizzontali.
   (d) Calcolare la primitiva F di f definita nel precedente punto.

23. Sia $f(x) = \begin{cases} 2x & x < -\pi \\ \sin(x) & x \ge -\pi \end{cases}$ e sia

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

   1) Disegnare il grafico di f.
   2) Senza calcolare l'integrale, usando il teorema fondamentale del calcolo, disegnare il grafico di G.
   3) Calcolare G(x) al variare di x nel dominio di G.

24. Enunciare il teorema fondamentale del Calcolo.

25. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e G una sua primitiva su $[a,b] \subset A$. Usando la prima parte del teorema fondamentale del calcolo, dimostrare che

$$\int_b^a f(x)dx = G(a) - G(b)$$

26. Considerare la funzione

$$H(x) = \int_0^{\cos(x)} \exp(-t^2)dt$$

   Si scriva H come composizione di una funzione integrale e la funzione $\cos$. Usando il teorema fondamentale del calcolo e la derivata della funzione composta, determinare $H'(x)$.

27. Sia f la funzione definita da $f(x) = \int_1^x \arccos(\ln(t))\,dt$. Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
f e' definita in $[1/e, e]$
f e' definita in $(-\pi/2, \pi/2)$
f e' definita in $\mathbb{R}$
f ha minimo negativo
f ha massimo positivo
f ha per tangente al suo grafico la retta $y = (\pi/2)(x-1)$
f e' decrescente nel suo dominio
f ha per tangente al suo grafico la retta $y - \pi/2 = (x-1)$ nel punto di ascissa 1
f e' positiva per $x > 1$ nel suo dominio
f e' negativa per $x < 1$ nel suo dominio
f e' strettamente crescente nel suo dominio
f non ha minimo
f non ha massimo
f e' positiva per $x > 0$ nel suo dominio
f e' negativa per $x > 1$ nel suo dominio

28. Sia Sia $f : (0,3) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $G(x) = \int_x^1 f(t)dt$. Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
$G'(x) = -f(x)$ in $(0,3)$
$G'(x) = f(x)$ in $(0,3)$
$G''(x) = f'(x)$ in $(0,3)$
$G''(x) = -f'(x)$ in $(0,3)$
$G'(x) = -f(x)$ in $[0,3]$
$G''(x) = -f(x)$ in $(0,3)$

29. Sia Sia $f : (0,3) \cup (5,7) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione con derivata seconda in $(0,3)$
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,7) - \{3,5\}$
$H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione derivabile in $(0,7) - \{3,5\}$
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione derivabile in $(0,3)$
$H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione con derivata seconda in $(5,7)$
$H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,3)$
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione con derivata seconda in $(0,3) \cup (5,7)$
$H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,3) \cup (5,7)$
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,7)$

30. Usare l'approssimazione di Taylor centrata in 0 del coseno per stimare
$$\cos(1) - (1 - 1/2 + 1/24)$$

31. Sia $P_n(x)$ il polinomio di Taylor centrato in 0 di $\exp(x)$. Dimostrare che se $x > 0$ allora $P_n(x)$ e' un'approssimaxione per difetto di $\exp(x)$. Cosa posso dire se $x < 0$?

32. Sapendo che $f \in C^\infty(-1,1)$ e che $f(x) = 3 + 2x^2 - x^3 + O(x^5)$, quali informazioni ho sulle derivate della f in 0?

33. Posso affermare che la funzione $f(x) = (x-2)^3\, e^{x+2}$ ha per immagine un intervallo? Perche'? Determinare l'immagine di f. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero ed il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

34. Determinare l'immagine di

$$(x-1)^2 - 4\ln(x-1)\,.$$

Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

35. Determinare l'immagine della funzione

$$f(x) = \frac{e^{(x-2)}}{x^4}$$

36. Prova scritta data il 3/2/04

(a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo.

(b) Sia f la funzione definita da $f(x) = \displaystyle\int_1^x \arccos(\ln((t))\,dt$.
Senza tentare di calcolare l'integrale decidere quale delle seguenti affermazioni è vera e spiegarne la ragione.

a. f è definita in $[1/e, e]$
b. f è decrescente nel suo dominio
c. f è negativa per $x < 1$ nel suo dominio
d. f ha massimo e minimo

Disegnare il grafico di f

37. Prova scritta data il 3/2/04

(a) Scrivere il polinomio di Taylor, $P_3(x)$, di ordine 3, centrato in 0 della funzione $f(x) = \sqrt{1+x}$ e il resto in forma di Lagrange. Sapendo che

$$D^4 f(x) = -\frac{15}{16\sqrt{(1+x)^7}}$$

stimare l'errore $|f(x) - P_3(x)|$ sull'intervallo $[-1/2, 1/2]$

(b) Definire la funzione arcsin e decidere quale delle seguenti affermazioni è vera, spiegandone la ragione.

a. $\sin(\arcsin(x)) = x, \forall x \in [-1, 1]$
b. $\arcsin(\sin(x))) = x, \forall x \in \mathbb{R}$
c. $\arcsin(\sin(x)) = \pi - x, \forall x \in (\pi/2, 3\pi/2]$
d. $\sin(\arcsin(x))$ puó esistere ed essere diverso da x