

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

1. Usando i polinomi di MacLaurin di $\exp(x)$ e di $\cos(x)$ determinare il polinomio di McLaurin di grado quattro centrato in $x_0 = 0$ della funzione

$$f : x \mapsto \exp(x^4)(\cos(x^2) - 3)$$

e dedurne che f ha un massimo locale negativo in $x_0 = 0$.

2. Data la funzione

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

determinarne il dominio D_F e interpretare in termini di area il valore $F(x)$ al variare di $x \in D_F$.

3. Verificare che $f(x) \leq -2$, dedurne che F e' decrescente e determinare le soluzioni della disequazione $F(x) \leq -2x$
4. Usando il punto 3. e la definizione di limite, dimostrare che

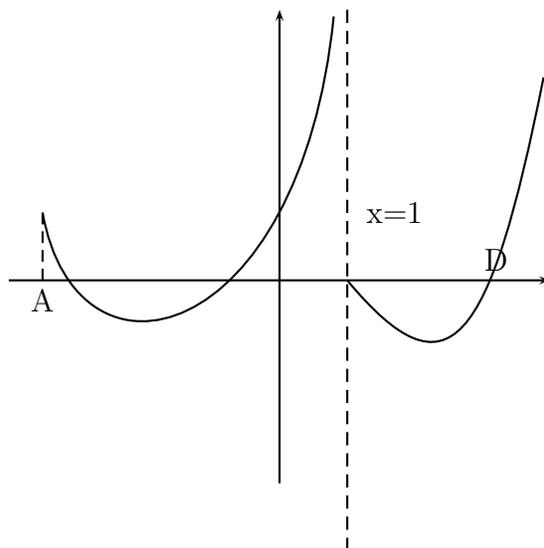
$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = -\infty$$

5. Cosa posso dire del limite di F per $x \rightarrow -\infty$?

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005 - 05scritti02

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia f la funzione il cui grafico e' disegnato in figura. I punti A e D hanno coordinate rispettivamente $(-3.5, 1)$ e $(3, 0)$; la retta $x = 1$ e' un asintoto verticale sinistro.



1. Data la funzione

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

determinarne il dominio D_F .

2. Data la funzione

$$G : x \mapsto \int_3^x f(t) dt$$

determinarne il dominio D_G e interpretare in termini di area il valore $G(x)$ al variare di $x \in D_G$.

3. Discutere l'affermazione: G ha minimo uguale a 0.
4. Supponendo che f rappresenti il grafico della derivata di una funzione H continua sulla semiretta $[-3.5, \infty)$, cosa si puo' dire della funzione H ? In particolare descrivere le proprieta' del punto $x = 1$ nei confronti della funzione H .
5. Quali relazioni ci sono fra i grafici di F , G e H .

ES.2 Determinare, se esistono, al variare di $n \in \mathbb{N}$ il limite, il limite destro e il limite sinistro per $x \rightarrow 0$ della funzione

$$\frac{(\sin(-x^2))^n}{\sqrt{x^7 - x^9}}$$

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Disegnare e calcolare l'area della parte di piano contenuta nel semipiano delle ascisse negative e compresa fra il grafico della funzione arctan e la retta $y = \pi x/4$.

ES.2 Calcolare, se esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4 - 3x^2) - 2 \ln(2)}{\sin(x^2)}$$

ES.3 Disegnare il grafico della funzione definita da

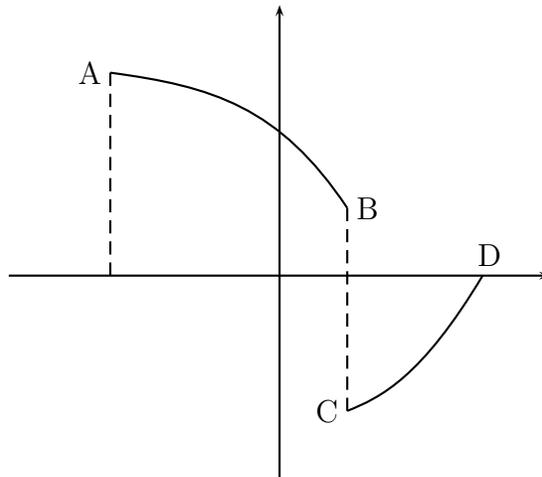
$$f(x) = e^{-2(x+1)^2}$$

Determinare l'immagine della funzione. Determinare l'eventuale massimo e minimo della funzione. Determinare il massimo e minimo della funzione nell'intervallo $[0, 2]$

**Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005**

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia f la funzione il cui grafico e' disegnato in figura. I punti $A \equiv (-2.5, 3)$, $B \equiv (1, 1)$, $D \equiv (3, 0)$ appartengono al grafico.



1. Il punto $C \equiv (1, -2)$ puo' appartenere al grafico di f ?

2. Data la funzione

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

determinarne il dominio D_F e interpretare in termini di area il valore $F(x)$ al variare di $x \in D_F$.

3. Determinare l'insieme dei punti in cui F e' continua e quelli in cui e' derivabile.
4. Determinare gli eventuali punti singolari di F e le eventuali tangenti in tali punti.
5. Individuare gli eventuali punti a tangente orizzontale.
6. Determinare gli intervalli in cui F e' crescente, decrescente, concava e convessa.
7. Disegnare il grafico di F

ES.2 Determinare, se esistono, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite, il limite destro e il limite sinistro per $x \rightarrow 0$ della funzione

$$\frac{(\exp(-x^2) - \cos(x))^\alpha}{\sqrt{x^7 - x^9}}$$

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1

1. Usando i polinomi di MacLaurin di $\sin(t)$, determinare il polinomio di Taylor, P_2 , centrato in $x_0 = \sqrt[3]{\pi}$ di grado 2 della funzione $f : x \mapsto \sin(x^3)$ e dedurne le proprieta' locali di crescita, decrescenza, concavita', convessita' e l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(\sqrt[3]{\pi}, 0)$.
2. Detto $p_n(t)$ il polinomio di McLaurin di $\sin(t)$, scrivere il resto

$$r_n(t) = \sin(t) - p_n(t)$$

in forma di Lagrange e di Peano. Spiegare perche' $r_n(t) = r_{n+1}(t)$, se n e' dispari.

3. (facoltativo) Usando il resto in forma di Lagrange, dimostrare che $|\sin(t) - t| < |t|^3/6$.

ES.2

Data la funzione

$$F : x \mapsto \int_2^x \frac{t-1}{(5-t)^2} dt$$

1. Determinarne il dominio D_F e interpretare in termini di area il valore $F(x)$ al variare di $x \in D_F$.
2. Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico (o i possibili grafici se le informazioni non sono sufficienti) di F
3. Calcolare $F(x)$, $x \in D_F$, e completare la descrizione del grafico

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia f una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ e sia $P_8(x) = -x + 3x^7$ il suo polinomio di McLaurin di grado 8

1. Determinare e disegnare la tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 0$
2. Quali derivate in $x = 0$ della funzione si possono determinare? Quali di esse sono nulle?
3. Determinare la parte principale per $x \rightarrow 0$ di $f(x) + x$
4. Quali delle seguenti affermazioni è vera?
 - a. Esiste un intorno di 0 in cui la funzione è crescente (decrescente)
 - b. Esiste un intorno di 0 in cui la funzione è concava (convessa)
 - c. La funzione ha un minimo (massimo) relativo nel punto 0
 - d. La funzione ha un flesso a tangente orizzontale (obliqua) nel punto 0
5. Sapendo che $|f^{(9)}(x)| \leq 1/2$ per ogni $x \in [-7, 7]$, stimare l'errore

$$|f(x) - (-x + 3x^7)|$$

per $x \in [-1, 0]$.

ES.2

Data la funzione

$$F : x \mapsto \int_{-10}^x \frac{t + 11}{5 + t} dt$$

1. Determinarne il dominio D_F e interpretare in termini di area il valore $F(x)$ al variare di $x \in D_F$.
2. Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico (o i possibili grafici se le informazioni non sono sufficienti) di F

3. Calcolare $F(x)$, $x \in D_F$, e completare la descrizione del grafico

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Calcolare, l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione $y = \sin(3x)$, e le rette di equazioni $y = \pi/4$ e $y = \pi/2$

ES.2 Sia la funzione f definita da $f(x) = \sqrt{9x^2 + \sqrt{4 - x^2}} - \sqrt{2}$

- a. Determinare il dominio.
- b. Determinare, se esiste, la tangente al grafico nei punti di ascissa $x = \pm 2$.
- c. Spiegare perchè posso affermare che f ammette massimo e minimo.
- d. Usando le approssimazioni di McLaurin note, determinare la parte principale di f per $x \rightarrow 0$ e dedurne l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 0$.
- e. Disegnare il grafico della funzione.

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1

1. Determinare una primitiva (antiderivata) su $(0, \infty)$ della funzione

$$x \mapsto x^x(\ln(x) + 1).$$

Si consiglia di usare la sostituzione $t = x \ln(x)$

2. Calcolare l'area della parte di piano delimitata dal grafico $y = f(x)$, l'asse x e le rette $x = 1/2$ e $x = 2$.

ES.2 Considerare la funzione f definita da $f(x) = x^x$

- a. Determinare il polinomio di Taylor di grado 3 e centrato in $x_0 = 1$ di f e dedurre l'equazione della tangente al grafico in $P \equiv (1, f(1))$ e le proprietà di convessità e concavità locale della funzione. Disegnare il grafico di f e della sua tangente vicino a P .
- b. Disegnare il grafico di f .

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Considerare la funzione definita da

$$f(x) = (x - 3)^2 - 4 \ln(|x - 3|).$$

1. Determinare il dominio
2. Determinare gli eventuali asintoti
3. Disegnare il grafico
4. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo assoluti di f
5. Usando i polinomi di McLaurin di $\ln(1+h)$, determinare il polinomio di McLaurin di grado 3 di f .

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Usando le approssimazioni di Taylor calcolare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{\ln(1 + x^4) - x^4}$$

ES.2 Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x \sin(3x)$, l'asse x e le rette di equazione $x = -\pi/2$ e $x = -\pi/6$

ES.3 Definire la funzione arcsin e disegnarne il grafico a partire dalla funzione sin, specificando dominio e immagine.

Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ e' vera l'affermazione

$$\arcsin(\sin(x)) = x + \pi?$$

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \ln(x)$, che deve ritenersi noto

1. f ha asintoti orizzontali o verticali?
2. Se $g(x) = f(x - 1) + \ln(2)$, usando il grafico di f disegnare il grafico di g e di $h : x \mapsto |g(x)|$.
3. La funzione h ha massimo o minimo? Se si determinarli.
4. Determinare gli eventuali punti singolari di h e le tangenti in tali punti.
5. Determinare l'area della parte di piano compresa fra i grafici delle funzioni f , g e le rette $x = 3/2$ e $x = 4$.
6. Usando il polinomio di McLaurin di $\ln(1+h)$, scrivere il polinomio di Taylor di grado 4 centrato in $x_0 = 3$ di g . Usando il polinomio precedentemente trovato, determinare l'equazione della tangente al grafico di g nel punto di coordinate $(3, g(3))$ e le derivate terze e quarte di g in $x_0 = 3$.

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \arctan(x)$, che deve ritenersi noto

1. f ha asintoti orizzontali o verticali?
2. Se $g(x) = f(x - 1) + \pi/4$, usando il grafico di f disegnare il grafico di g e di $h : x \mapsto |g(x)|$, determinando in particolare le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali e verticali.
3. La funzione h ha massimo o minimo? Se si determinarli.
4. Determinare gli eventuali punti singolari di h e le tangenti in tali punti.

- Determinare l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione g , l'asse x e le rette $x = -2$ e $x = 4$.
- Determinare la funzione derivata di $f = \arctan$ e indicarla con Df . Usando il polinomio di McLaurin di $(1 + h)^{-1}$, scrivere il polinomio di McLaurin di grado 6 di Df . Usando il polinomio trovato, quali derivate in $x_0 = 0$ della funzione Df posso determinare? Usando le derivate di Df trovate, scrivere il polinomio di grado 7 di McLaurin della funzione \arctan

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

- Usando i polinomi di MacLaurin di $\ln(1 + x)$, determinare la derivata seconda in $x_0 = 1$ della funzione $f : x \mapsto x^4 \ln(x)$

- Data la funzione

$$F : x \mapsto \int_2^x \frac{1}{f(t)} dt$$

determinarne il dominio D_F e interpretare in termini di area il valore $F(x)$ al variare di $x \in D_F$.

- Supponendo noto il risultato: *Ogni funzione monotona su una semiretta positiva ammette limite per $x \rightarrow \infty$* , dimostrare che esiste

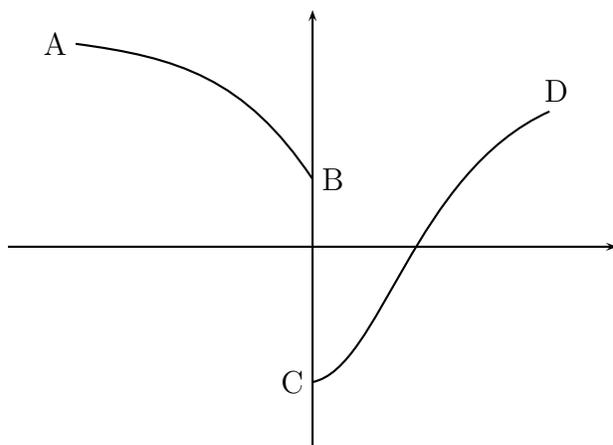
$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$$

- Verificare che le soluzioni della disequazione $\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{x^4}$ contengono la semiretta $[3, \infty)$
- Facendo uso dei risultati dei punti 3., 4. e delle proprietà dei limiti, dimostrare che la funzione F ha un asintoto orizzontale.

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia f la funzione il cui grafico e' disegnato in figura. I punti $A \equiv (-3.5, 3)$, $B \equiv (0, 1)$, $D \equiv (3.5, 2)$ appartengono al grafico.



1. Il punto $C \equiv (0, -2)$ puo' appartenere al grafico di f ?

2. Data la funzione

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

determinarne il dominio D_F e interpretare in termini di area il valore $F(x)$ al variare di $x \in D_F$.

3. Determinare l'insieme dei punti in cui F e' continua e quelli in cui e' derivabile.

4. Determinare gli eventuali punti singolari di F e le eventuali tangenti in tali punti.

5. Determinare, se possibile, gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e assoluto e quelli di flesso.

6. Disegnare il grafico (o i possibili grafici) di F

7. Cambierebbe qualcosa nello studio della funzione F , se il punto A non appartenesse al grafico di f ?

ES.1 Determinare, se esistono, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite, il limite destro e il limite sinistro per $x \rightarrow 0$ della funzione

$$\frac{(\sin(2x^3) - 2x^3)^\alpha}{\ln(3 + x^7) - \ln(3)}$$

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1

1. Usando i polinomi di MacLaurin di $\exp(t)$, determinare il polinomio di Taylor, P_2 , centrato in $x_0 = 1$ di grado 2 della funzione $f : x \mapsto \exp(x^3)$ e dedurne le proprietà locali di crescita, decrescenza, concavità, convessità.
2. Detto $p_n(t)$ il polinomio di McLaurin di $\exp(t)$, scrivere il resto

$$r_n(t) = \exp(t) - p_n(t)$$

in forma di Lagrange e di Peano.

3. (facoltativo) Usando il resto in forma di Lagrange, dimostrare che $p_n(t)$ è una approssimazione per difetto di $\exp(t)$ se $t > 0$ per ogni n oppure se $t < 0$ e n è dispari, mentre è una approssimazione per eccesso se $t < 0$ e n è pari.
4. (facoltativo) Cosa si può dire dell'approssimazione $P_2(9/10)$ di $\exp(729/10^3)$?

ES.2

Data la funzione

$$F : x \mapsto \int_2^x \frac{t-1}{5-t} dt$$

1. Determinarne il dominio D_F e interpretare in termini di area il valore $F(x)$ al variare di $x \in D_F$.
2. Senza calcolare l'integrale, disegnare il grafico (o i possibili grafici se le informazioni non sono sufficienti) di F
3. Calcolare $F(x)$, $x \in D_F$ e completare la descrizione del grafico

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia la funzione f definita da $f(x) = \sqrt{9 - \sqrt{4 - x^2}} - \sqrt{7}$

- a. Determinare il dominio.
- b. Determinare i punti in cui la funzione è continua.
- c. Spiegare perché posso affermare che f ammette massimo e minimo.
- d. Determinare la parte principale di f per $x \rightarrow 0$ e dedurne l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 0$.
- e. Determinare il massimo, il minimo e i punti di massimo e di minimo della funzione sull'intervallo $[-1, 0.5]$.

f. Applicare la sostituzione $x = 2 \sin(t)$ all'integrale indefinito

$$\int \sqrt{9 - \sqrt{4 - x^2}} dx$$

ES.2 Calcolare, se esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 - 3x^2} - 3}{\ln(1 + x^3)}$$

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Considerare la funzione f definita da $f(x) = xe^{2x-1}$

- a. Determinare il polinomio di McLaurin di grado 3 di f e dedurre l'equazione della tangente al grafico nell'origine e le proprietà di convessità e concavità locale della funzione. Disegnare il grafico di f e della sua tangente vicino all'origine.
- b. Disegnare e calcolare l'area della parte di piano compresa fra il grafico di f e la retta di equazione $y = e^2x$.
- c. (facoltativo) Disegnare il grafico di f .

Prova scritta di Analisi Matematica 1 - C.d.L. Civile
Anno accademico 2004-2005

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Disegnare il grafico della funzione arctan che deve ritenersi noto.

- a. Determinare e disegnare la tangente nell'origine.
- b. Disegnare la retta $y = \pi x/4$ e determinare l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione e la retta.

ES.2 Calcolare, se esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(9 - 3x^3) - 2 \ln(3)}{\sin(x^4)}$$

ES.3 Disegnare il grafico della funzione definita da

$$f(x) = e^{-(x-1)^2} - 2$$

e determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione

$$f(x) = k$$