OPERAZIONI CON I LIMITI

Al fine di facilitare la memorizzazzione dei risultati, descriviamo le relazione esistenti fra l'operazione di limite e le operazioni fondamentali fra funzioni mediante delle tabelle. Supponiamo che

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lambda_1 \quad , \quad \lim_{x\to\alpha} g(x) = \lambda_2$$

dove sia α che λ_1, λ_2 possono essere numeri reali o uno dei simboli introdotti, cioè

$$\alpha = a \in \mathbb{R},\ a^-,\ a^+,\ \pm\infty,$$

$$\lambda_1,\, \lambda_2 = L \in \mathbb{R},\ \pm\infty$$

Tabella per la somma di limiti

Si ha

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) + g(x) = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$$

con λ somma di numeri reali o definito dalla seguente tabella

$$\pm\infty\ + L = L\ \pm\infty = \pm\infty, \quad \forall L \in \mathbb{R}$$
$$\infty + \infty = \infty, \qquad -\infty + (-\infty) = -\infty$$
$$\infty + (-\infty) \quad \text{e} \quad -\infty + \infty \quad \textbf{non sono definiti}$$

Tabella per il prodotto di limiti

Si ha

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = \lambda_1\lambda_2 = \lambda$$

con λ prodotto di numeri reali o definito dalla seguente tabella

$$\infty\,\infty = (-\infty)(-\infty) = \infty$$
$$\infty\,(-\infty) = (-\infty)\,\infty = -\infty$$

$$L\,\infty = \infty\,L = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad L > 0 \\ \textbf{non è definito} & \text{se} \quad L = 0 \\ -\infty & \text{se} \quad L < 0 \end{cases}$$

$$L\,(-\infty) = -\infty\,L = \begin{cases} -\infty & \text{se} \quad L > 0 \\ \textbf{non è definito} & \text{se} \quad L = 0 \\ +\infty & \text{se} \quad L < 0 \end{cases}$$

Tabella per il reciproco del limite

Conviene definire

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0^{\pm}$$

se $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$ e $f(x)$ e' positiva (rispettivamente negativa) "vicino" a zero. Si ha

$$\lim_{x\to\alpha} 1/f(x) = 1/\lambda_1$$

con $1/\lambda_1$ reciproco di un numero reale diverso da zero o definito dalla seguente tabella

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{\infty} = 0^+, \quad \frac{1}{-\infty} = 0^-$$
$$\frac{1}{0^+} = \infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\text{per} \quad \frac{1}{0} \quad \text{si puo' dire solo} \quad \lim_{x\to\alpha} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$$

Dalle tabelle del prodotto e del reciproco, ricavare la **tabella del quoziente** .
I simboli

$$-\infty + \infty \quad , \pm\infty\, 0 \quad , \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad , \frac{0}{0}$$

sono dette **forme indeterminate** perche' in questi casi i rispettivi limiti possono assumere qualsiasi valore oppure non esserci.