Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I
Lezioni A.A. 2003/2004 , prof. G. Stefani
primo semiperiodo 22/9/03-8/11/03

Testo consigliato: Robert A. Adams - Calcolo differenziale 1 - Casa Editrice Ambrosiana

Il registro delle lezioni contiene gli argomenti svolti a lezione ed alcuni suggerimenti su come usare il testo. Occasionalmente saranno proposti esercizi e date spiegazioni di argomenti. Se non specificato altrimenti i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono allla terza edizione del testo consigliato, in parentesi appaiono quelli riferiti alla seconda edizione.

1 23-26/9. Capitolo P, preliminari

Martedi' 23/9
1. Spiegazioni sullo svolgimento del corso.
Prerequisiti al corso sono stati svolti nel precorso di matematica svolto dal 9 al 18 settembre e si trovano nei paragrafi P.1, P.2, P.3, P.6, capitolo "Preliminari", e nel paragrafo 3.2 (4.2), capitolo "Le funzioni trascendenti". Porre particolare attenzione alle proprieta del valore assoluto, alle equazioni e disequazioni di primo e secondo grado e razionali, alle formule di trigonometria e alle proprieta' di logaritmi ed esponenziali.
Numeri reali, naturali o interi positivi, interi, razionali e notazioni insiemistiche

$$x \in \mathbb{R},\ \mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q}$$

La retta reale. Proprieta' di ordine $(<, \leq)$ e di completezza dei numeri reali.
Esempi: $\sqrt{2}, \pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$
2. Valore assoluto e distanza, intervalli (limitati, illimitati, aperti, chiusi, semiaperti) e loro estremi. **Attenzione:**

sul testo gli intervalli con estremi reali sono detti **finiti**, noi li chiameremo **limitati**

Mercoledi' 23/9
3. Lunghezza o misura di un intervallo limitato e sua rappresentazione in termini di distanza.
Esercizio: trovare centro (punto medio) e raggio di un intervallo limitato (a, b).
Rappresentazione grafica di intervalli e soluzioni di disequazioni e sistemi di disequazioni.
Esempi:

$$|x+4| < |x-3|,\ x^2 - 4 < 0,\ x^2 \geq 8,\ x^2 \geq -5,\ x^2 \leq -5$$

Coordinate cartesiane nel piano. Grafici di equazioni e disequazioni: retta e circonferenza. Riguardare sul testo parabola, ellisse e iperbole (vedi anche il precorso)
4. Funzioni: definizione e notazione di $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$, dominio, codominio, immagine. Funzioni reali di una variabile reale: grafici, **convenzione sul dominio**, es: dominio della funzione $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2}$.
La funzione **radice quadrata** $x \mapsto \sqrt{x}$, e il suo dominio.
5. Esercizi.
Venerdi' 25/9
6. Grafico di alcune funzioni elementari:

$$c,\ |x|,\ x^n,\ \sqrt[n]{x},\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{x^n}$$

Funzioni pari, dispari, esempi: x^{2n}, x^{2n+1}. Operazioni fra funzioni: somma, differenza, prodotto e quoziente. Polinomi e funzioni razionali, riguardare la divisione fra polinomi, teorema e regola di Ruffini.

7. Composizione di funzioni. Esempi: date $f : x \mapsto x^3$, $g : x \mapsto x - 1$, $h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$, calcolare $f \circ g$, $g \circ f, h \circ h$, specificando il dominio.
Funzioni definite a tratti, esempi: il valore assoluto abs : $x \mapsto |x|$, la funzione segno sgn : $x \mapsto \mathrm{sgn}(x)$, la funzione parte intera (o floor) $x \mapsto [x]$.

Attenzione:

- in alcuni testi sgn(x) e' definita anche in 0, cioe' $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} x/|x| & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

- Nel testo, esempio 10, paragrafo P.6, il valore della funzione parte intera (o floor) e' indicato con $\lfloor x \rfloor$

8. Cambio di scala e traslazione di un grafico, simmetrie e riflessioni. Esempi di grafici di funzioni deducibili da quelli delle funzioni elementari: esercizi

$$(x-2)^2 - 1 \ , \qquad \frac{x}{1-x} = -\frac{x-1+1}{x-1} = -1 - \frac{1}{x-1}$$

2 30/9-3/10. Paragrafi P.6 e 1.1,2,3,5

Martedi' 30/9
9. Misura dell'angolo in radianti. I grafici delle funzioni trigonometriche e le loro proprieta':

$$\sin(x) \ , \ \cos(x) \ , \ \tan(x) \ , \ \cot(x).$$

Funzioni periodiche.
10. Esercizi: determinare il dominio delle funzioni definite da $f(x) =$

$$\sqrt{2\cos(x)+1}, \quad \sqrt{2\cos(x) \pm 4}, \quad \sqrt{\frac{1}{|\tan(x)|}}, \quad \sqrt{\frac{x + \sin(\pi x)}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Mercoledi' 1/10
11. Il procedimento di limite. Limite destro e sinistro di funzioni definite su intervalli: definizione intuitiva e formale, esempi:

$$\lim_{x \to 0^\pm} \mathrm{sgn}(x) = \pm 1, \quad \lim_{x \to n^\pm} [x].$$

$$\lim_{x \to a^\pm} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^\pm} f(x) - L = 0.$$

Limite di funzioni definite su intervalli e sua relazione con i limiti destro e sinistro. Esempi:

$$\lim_{x \to a} c = \lim_{x \to a^\pm} c = c, \quad \lim_{x \to a^\pm} x \ \lim_{x \to a^\pm} x = a$$

Esercizi:

$$\lim_{x \to a} x^2 = a^2, \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}, \quad \lim_{x \to n^\pm} [x], \quad \lim_{x \to 0^+} \sin(\frac{1}{x})$$

12. Localizzazione del limite, cioe' dipendenza del valore limite solo dai valori della funzione " vicini ad a ", cioe' in un intorno (destro, sinistro) di a, a escluso. Unicita' del limite. Limite grafico di funzioni definite a tratti.
13. Ricevimento studenti in aula con correzione di esercizi. Sono stati anche proposti i seguenti esercizi la cui soluzione e' materia di una esercitazione col computer che e' in rete nella sezione "Esercitazioni al computer".

Usando i grafici di alcune funzioni elementari, i concetti di traslazione, simmetria e la definizione di valore assoluto, disegnare i grafici delle funzioni definite da $f(x) =$

$$\frac{x}{1-x}, \quad \sqrt{1-x}+1, \quad \sin(|x|), \quad |\sin(x)|$$

$$2^x, \quad 2^{|x|}, \quad 2^x - 2, \quad |2^x - 2|, \quad 2^{|x|} - 2$$

Venerdi' 3/10
14. Limiti infiniti e all'infinito, asintoti orizzontali e verticali. Esempi: $1/x^n$, $\sin(x)$
Attenzione: in alcuni testi si distingue fra $+\infty$ e ∞, noi, seguendo il testo, faremo la seguente

convenzione: $\quad \infty = +\infty$

15. Proprieta' dei limiti (senza dimostrazione): unicita', compressione (teorema dei carabinieri), permanenza del segno e monotonia.
Esercizio: verificare che $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$
16. Regole per il calcolo dei limiti (senza dimostrazione): somma, prodotto, quoziente, radice, vedi anche le tabelle nel file **Operazioni con i limiti** che si puo' scaricare dal **Materiale didattico**. Limiti di polinomi e delle funzioni razionali.

3 7-10/10. Paragrafo 1.4

Martedi' 7/10
17. Funzioni continue in un punto e in un intervallo. Funzioni continue a destra e a sinistra. Teorema di permanenza del segno per le funzioni continue.
18. Continuita' e limiti delle funzioni elementari (senza dimostrazione)

$$x^n, \quad 1/x^n, \quad \sqrt[n]{x}, \quad |x|, \quad \mathrm{sgn}(x), \quad [x], \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad \tan(x)$$

Continuita' delle funzioni definite a tratti.
Mercoledi' 8/10
19. Costruzione di funzioni continue: somma, prodotto, quoziente, composizione. Estensioni continue e discontinuita' rimovibili. Esempi:

$$\frac{x^2-1}{x-1}, \quad \frac{\sin(x)}{x}, \quad x\sin(1/x)$$

20. Esercitazione con il computer
21. Ricevimento studenti in aula con eventuale correzione di esercizi.
Venerdi' 10/10
22 Proprieta' delle funzioni continue sugli intervalli (senza dimostrazione): il teorema di Weierstrass (esistenza di massimi e minimi) e il teorema dei valori intermedi (radici di equazioni). Conseguenze sul segno delle funzioni continue e sul disegno dei grafici. Esempi: esistenza di una radice reale per i polinomi di grado dispari,

$$f(x) = x\cos(x), \ (x-2)/(x^2-1)$$

23. Funzioni definite su intervalli: funzioni limitate, superiormente (inferiormente) limitate, estremo superiore (inferiore), massimo (minimo), punto di massimo (minimo). Massimi e minimi sugli intervalli.
24. Esercizi: Determinare la massima (minima) area dato il perimetro $2p$ di un rettangolo non degenere

$$A = x(p-x) = -(x-p/2)^2 + p^2/4.$$

Determinare il minimo (massimo) perimetro di un rettangolo, data l'area A

$$p = 2(x + \frac{A}{x}) = 2\left((\sqrt{x} - \sqrt{\frac{A}{x}})^2 + 2\sqrt{A}\right)$$

4 14-17/10. Paragrafi 2.1-5, 2.8(2.7), 2.6(5.1-2)

Martedi' 14/10
25. Rapporto incrementale di una funzione in un punto e suo significato geometrico. Riflettere sulla seguente affermazione: una funzione e' continua se e solo se $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e' una forma indeterminata.

Attenzione: Il rapporto incrementale sul testo e' chiamato il rapporto di Newton.

Definizione di derivata in un punto, funzione derivata. Derivata e retta tangente, derivata e approssimazione lineare.
26. Derivata delle funzioni x^n, $\sqrt[n]{x}$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $|x|$, esercizio proposto: calcolare la funzione derivata di $[x]$. La continuita' e' una condizione necessaria per la derivabilita', cioe' ogni funzione derivabile e' continua.
Mercoledi' 15/10.
27. Derivata di somma, prodotto, quoziente e composizione. La funzione x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ e la sua derivata: dominio, continuita', derivabilita', grafico.
28. Esercizi.
29. Ricevimento in aula con eventuale correzione di esercizi.
Venerdi' 17/10.
30. Derivate di ordine superiore. L'insieme

$$C^n(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : \text{esiste ed e' continua la derivata n-sima in ogni punto di } A\}$$

$$C^\infty(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ esiste la derivata n-sima in ogni punto di } A\}$$

Attenzione: Il testo non riporta la definizione di $C^n(A)$ e di $C^\infty(A)$.

Esempi: $polinomi, \sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\tan$ e' C^∞ sul suo dominio, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $f_\alpha(x) = x^\alpha$ e' C^∞ su $(0, \infty)$. Esercizio in parte svolto e in parte proposto: per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \in C^n([0, \infty))$, per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \in C^\infty([0, \infty))$?
Punti singolari: punti a tangente verticale, cuspidi, punti angolosi

Attenzione: Il testo non considera le cuspidi punti a tangente verticale. Alcuni autori (ed anche io) preferiscono considerarli punti a tangente veticale, anche se "solo una semiretta si puo' considerare tangente"

31. Teorema di Lagrange (o dei valori intermedi), senza dimostrazione, sua interpretazione geometrica e in termini di valutazione dell'errore. Esempio: $|\sin(x) - \sin(a)| < |x - a|$. Definizione di funzioni crescenti e decrescenti su intervalli: uso del teorema di Lagrange per ottenere una condizione sufficiente per la crescenza o decrescenza di una funzione. Esercizi proposti: disegnare i grafici di funzioni razionali.
32. Esercitazione col computer su limiti e continuita'.

5 21-24/10. Paragrafi 2.6(5.1,5.2) e 2.10-11(2.9,3.1)

Martedi' 21/10
33. Dimostrazione del teorema di Lagrange mediante i teoremi di Fermat e Rolle. Significato geometrico e analitico dei teoremi di Fermat e Rolle e loro applicazione allo studio delle funzioni: definizione di massimi e minimi relativi (o locali). Esempi: polinomi e $\sqrt{|x|}$
34. Esercizi sulla derivabilita' delle funzioni definite a tratti e sullo studio dei grafici di funzioni
Mercoledi' 22/10.
35. Uso del teorema di Lagrange per dimostrare: se una funzione ha derivata nulla su un intervallo allora e' costante sull'intervallo. Antiderivate su intervalli: **Attenzione:** io

preferisco chiamarle primitive
Struttura delle antiderivate su intervalli, equazioni differenziali e problemi ai valori iniziali.

36. Primo esempio di problema ai valori iniziali: la caduta dei gravi.

Attenzione : sul testo la caduta dei gravi e' trattata solo per velocita' iniziali verticali. Di seguito si da un breve riassunto della trattazione completa

Caduta dei gravi. In un qualsiasi riferimento cartesiano con asse z coincidente con la verticale ascendente, se si trascura la resistenza dell'aria, le equazioni differenziali sono

$$\ddot{x} = 0, \; \ddot{y} = 0, \; \ddot{z} = -g.$$

Scegliendo opportunamente il sistema cartesiano, si puo' sempre ipotizzare che al tempo 0 il grave si trovi nel punto $P_0 = (0, 0, z_0), \; z_0 \geq 0$, ed abbia velocita' $\vec{v}_0 = (a, 0, b), \; a \geq 0$, dove $a\,\vec{\imath}$ e' la velocita' orizzontale e $b\,\vec{k}$ e' la velocita' verticale. Si ottengono le condizioni iniziali

$$x(0) = 0, \; y(0) = 0, \; z(0) = z_0, \; \dot{x}(0) = a, \; \dot{y}(0) = 0, \; \dot{z}(0) = b.$$

Il teorema di Lagrange ci permette di determinare l'equazione di moto del grave

$$x(t) = a\,t, \; y(t) = 0, \; z(t) = z_0 + b\,t - g\,\frac{t^2}{2}.$$

Si noti che il moto e' verticale se e solo se $a = 0$ e che se $a \neq 0$ la traiettoria e' una parabola nel piano verticale che contiene $\vec{v}_0$. Le equazioni della parabola sono

$$z = z_0 + \frac{b}{a}\,x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{a^2}$$

Esercizio proposto. Si determini l'equazione della traiettoria $z = f(x)$ in funzione del modulo (intensita') di $\vec{v}_0$, e dell'angolo (orientato) che la velocita' iniziale forma con il piano orizzontale. Si disegnino i possibili grafici della traiettoria, considerando che il piano terra abbia quota $z = 0$. Che significato ha l'approssimazione lineare della traiettoria in $x = 0$?
37. Test di esercitazione.
Venerdi' 24/10.
Adesione allo sciopero generale

6 29-31/10. Paragrafi 4.1-5(5.1-4) , 5.1-3(6.1-3)

Martedi' 28/10.
38. Punti singolari (dove non esiste derivata), critici (dove la derivata e' nulla). Ricerca dei massimi e minimi di una funzione. Esempi.
39. Concavita' e convessita di una funzione su un intervallo.

Attenzione : sul testo le funzioni convesse vengono chiamate con la concavita' verso l'alto e le funzioni concave con la concavita' verso il basso

Mercoledi' 30/10.
40. Complementi su antiderivate e equazioni differenziali. Studio del grafico di una cubica. Altri esercizi.
41. Esercizi
42. Ricevimento studenti in aula con eventuale correzione degli esercizi relativi al test di esercitazione.

Venerdi' 31/10.
43. Il simbolo di sommatoria $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ e le sue proprieta'. Esempi:

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n\,, \quad \sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2\,, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad x \neq 0, 1$$

44. Il problema del calcolo delle aree. Somme di Riemann per le funzioni continue su intervalli limitati. L'integrale di Riemann (sul testo chiamato integrale definito): definizione e significato geometrico in termini di area.
45. Il caso delle funzioni limitate e non continue. Integrabilita' delle funzioni continue e continue a tratti (senza dimostrazione). L'integrale orientato e suo significato geometrico in termini di area.

7 4-7/11. Paragrafi 5.4-7 (6.4-7)

Martedi' 4/11
46. Proprieta' dell'integrale: linearita', additivita' rispetto all'intervallo e integrale delle funzioni continue a tratti, monotonia, disuguaglianza triangolare detta in alcuni testi continuita' (senza dimostrazione ma con significato geometrico).
Teorema del valor medio per le funzioni continue (con dimostrazione).
47. Teorema fondamentale del calcolo parte prima: enunciato e sue conseguenze per l'esistenza di soluzioni delle equazioni differenziali del tipo $f'(x) = g(x)$, con x appartenente ad un intervallo su cui g e' continua.
Esercizio da svolgere a casa: leggere la tabella delle derivate in maniera da calcolare le soluzioni dell'equazione differenziale $f'(x) = g(x)$ con

$$g(x) = \sin(x), \cos(x), \frac{1}{(\cos(x))^2}, 1 + \tan(x))^2, x^\alpha,$$

con le derivate sin qui considerate per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si puo' trovare la soluzione? Inoltre per ognuna delle equazioni differenziali considerate determinare su quali intervalli puo' essere considerata.
Mercoledi' 5/11
48. Dimostrazione della prima parte del teorema fondamentale del calcolo e enunciato e dimostrazione della seconda parte (detta in alcuni testi formula fondamentale del calcolo).
Integrale di funzioni pari e dispari, indipendenza rispetto alle traslazioni orizzontali.
Esercizio. Calcolare usando il significato geometrico e le proprieta' dell'integrale:

$$\int_{-4}^{1} (2+x)\,dx, \quad \int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx, \quad \int_{-3}^{3} \sqrt{18-2x^2}\,dx, \quad \int_{-1}^{3} 2 + \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

49. Esercizi sul grafico delle funzioni integrali.
50. Esercizi
Venerdi' 7/11
51. Calcolo delle primitive: primitiva di $f(ax)$ e $f(x+a)$ nota una primitiva di f. Esempi di calcolo di primitive.
52. Area di superfici comprese fra due curve, esempi ed esercizi.
53. Esercizi.