Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I
Esercizi sulle approssimazioni di Taylor

1. Determinare il primo termine non nullo dell'approssimazione di Taylor centrata in 0 della funzione
$$\sin(x) - x + x^3/6$$

2. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + x^3/6}{x^\alpha}$$

3. Determinare il primo termine non nullo dell'approssimazione di Taylor centrata in 0 delle funzioni
$$\ln(1 + x^3) - x^3, \quad \sqrt{1 + x^\alpha} - 1$$
Suggerimento: usare la sostituzione $t = x^3$ per la prima e $t = x^\alpha$ per la seconda.

4. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^3) - x^3}{\sqrt{1 + x^\alpha} - 1}$$

5. Determinare il primo termine non nullo dell'approssimazione di Taylor centrata in 0 delle funzioni
$$(\sinh(x) - x)^2, \quad \ln(\cos(x)) + x^2/2$$

6. Determinare, se esiste
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sinh(x) - x)^2}{\ln(\cos(x)) + x^2/2}$$

7. Determinare il primo termine non nullo dell'approssimazione di Taylor centrata in 0 della funzione
$$\frac{\cosh(x^2)}{1 - x + \ln(1 + x + x^2)} - 1$$
Suggerimento: usare la sostituzione $t = x + x^2$ e considerare l'approssimazione del secondo ordine di $1 - x + \ln(1 + x + x^2)$. Si consiglia di far figurare nel calcolo $O(x^3)$

8. Usare l'approssimazione di Taylor centrata in 0 col resto in forma di Lagrange della funzione $\sin(x)$ per stimare che
$$\left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 + \frac{x^2}{6} \right| < 10^{-6}\ , \quad \forall x \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$$
Stimare sull'intervallo $[-1, 1]$
$$\left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} \right|$$

9. Determinare tutte le derivate in $x = 0$ delle funzioni
$$\frac{\cosh(x) - 1}{x^2}, \quad \frac{\cosh(x) - 1}{x}$$
e disegnarne il grafico.

10. Disegnare il grafico della funzione
$$\frac{\sinh(x) - x}{x^5}$$