

**Prova scritta di Analisi Matematica I - C.d.L. Civile**  
**Anno accademico 2002-2003**

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

1. Disegnare il grafico della funzione  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 \ln(x)}$
2. Definire il significato dell'integrale improprio

$$\int_2^{\infty} f(x) dx$$

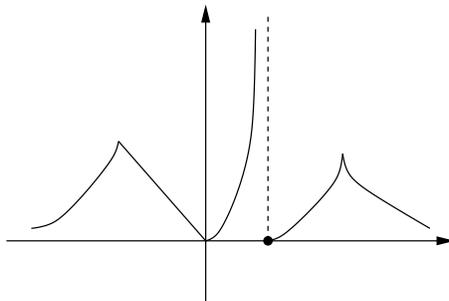
e interpretarlo in termini di area

3. Verificare che le soluzioni della disequazione  $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$  contengono la semiretta  $[e, \infty)$
4. Facendo uso dell'interpretazione in termini di area dell'integrale improprio e del precedente punto, dimostrare che il precedente integrale improprio converge.

**Prova scritta di Analisi Matematica I - C.d.L. Civile**  
**Anno accademico 2002-2003**

Rispondere ai quesiti indicati giustificando le risposte.

1. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua su tutto  $\mathbb{R}$  la cui derivata e' rappresentato dalla seguente figura, dove l'asintoto ha equazione  $x = 1$



- a. Specificare quali sono i punti in cui la funzione  $f$  non e' derivabile ed indicare di che tipo di punti si tratta.
  - b. Cosa si puo' dire della derivata seconda di  $f$ ?
  - c. Determinare gli intervalli di crescita e decrescenza di  $f$  e gli eventuali massimi e minimi globali e locali.
  - d. Determinare gli intervalli in cui la funzione  $f$  e' concava o convessa.
  - e. Cosa si puo' dire degli asintoti verticali e orizzontali di  $f$ ?
  - f. Disegnare un possibile grafico per  $f$
  - g. Cosa si puo' dire della funzione  $x \mapsto \int_{-1}^x f'(t) dt$ , se  $\int_{-1}^x$  rappresenta l'integrale orientato secondo Riemann?
  - h. Cosa si puo' dire dell'integrale improprio  $\int_{-1}^1 f'(t) dt$ ?
2. Definire l'argomento principale di un numero complesso  $z = a + ib$  e spiegarne la relazione con  $\arctan(b/a)$ ,  $a \neq 0$

**Prova scritta di Analisi Matematica I - C.d.L. Civile**  
**Anno accademico 2003-2004**

Rispondere ai quesiti indicati giustificando le risposte.

Considerare la funzione definita da

$$f(x) = (x - 1)^2 - 2 \ln(x - 1).$$

1. Determinare il dominio
2. Determinare gli eventuali asintoti
3. Determinare, se esiste, la tangente nel punto di ascissa  $x = 1/2$
4. Determinare, se esiste, la tangente nel punto di ascissa  $x = 2$
5. Disegnare il grafico
6. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo assoluti di  $f$
7. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di  $f$  nell'intervallo  $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$
8. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di  $f$  nell'intervallo  $[3, 7]$
9. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di  $f$  nell'intervallo  $\left[\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right]$

**Prova scritta di Analisi Matematica I - C.d.L. Civile**  
**Anno accademico 2002-2003**

Rispondere ai quesiti indicati giustificando le risposte.

1. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse  $x$ , il grafico della funzione  $f(x) = \frac{x}{3x^2 + 1}$  e le rette verticali di equazioni  $x = -3$  e  $x = 1$
2. Determinare e disegnare le soluzioni di  $z^3 = i$

**Prova scritta di Analisi Matematica I - C.d.L. Civile**  
**Anno accademico 2003-2004**

Usando le approssimazioni di Taylor calcolare, se esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-3x} - 1)^5}{\ln(1 + x^2) - x^2}$$

**Prova scritta di Analisi Matematica I - C.d.L. Civile**  
**Anno accademico 2003-2004**

Usando le approssimazioni di Taylor calcolare, se esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-3x} - 1)^5}{\ln(1 + x^3) - x^3}$$

**Prova scritta di Analisi Matematica I - C.d.L. Civile**  
**Anno accademico 2003-2004**

Rispondere ai quesiti indicati giustificando le risposte.

1. Determinare numero e segno delle soluzioni dell'equazione  $(x - 2)^3 e^{x+2} = 2$
2. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione  $(x - 2)^3 e^{x+2} = k$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .
3. Determinare su quali intervalli è invertibile la funzione

$$x \mapsto (x - 2)^3 e^{x+2}$$

4. Disegnare il grafico della funzione

**Prova scritta di Analisi Matematica I - C.d.L. Civile**  
**Anno accademico 2003-2004**

Rispondere ai quesiti indicati giustificando le risposte.

Disegnare il grafico della funzione  $f(x) = \arctan(x)$

1.  $f$  ha asintoti orizzontali o verticali?
2. La funzione è pari, dispari, periodica?
3. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di  $f$  nel punto di ascissa  $x = 1/2$ .
4. Usando il grafico di  $f$  disegnare il grafico di  $g(x) = |f(x - 1) - \pi/4|$ .
5. La funzione  $g$  ha massimo o minimo? Se si determinarli.
6. Determinare gli eventuali punti singolari di  $g$  e le tangenti in tali punti.
7. Determinare l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione  $g$  e la retta congiungente i punti di coordinate  $(2, g(2))$  e  $(1 + \sqrt{3}, g(1 + \sqrt{3}))$
8. Determinare l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione  $f$  e la retta congiungente i punti di coordinate  $(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}))$  e  $(1, f(1))$
9. Definire la funzione  $\arctan$
10. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in 0 di  $f$  e il resto in forma di Lagrange

**Prova scritta di Analisi Matematica I - C.d.L. Civile**  
**Anno accademico 2003-2004**

Rispondere ai quesiti indicati giustificando le risposte.

Sia  $f$  una funzione  $C^\infty(\mathbb{R})$  e sia  $P(x) = -(x+1) - (x+1)^2 + 3(x+1)^3$  il suo polinomio di Taylor centrato in  $x_0 = -1$

1. Determinare e disegnare la tangente al grafico nel punto di ascissa  $x_0$
2. Determinare  $f(-1)$ .
3. Quali derivate della funzione si possono determinare?
4. Disegnare il grafico di  $f$  vicino a  $(-1, f(-1))$
5. Determinare la parte principale per  $x \rightarrow -1$  di  $f(x) - f(-1)$
6. Quali delle seguenti affermazioni e' vera?
  - a. Esiste un intorno di  $-1$  in cui la funzione e' crescente (decrescente)
  - b. Esiste un intorno di  $-1$  in cui la funzione e' concava (convessa)
  - c. La funzione ha un minimo (massimo) relativo nel punto  $-1$
  - d. La funzione ha un flesso a tangente orizzontale (obliqua) nel punto  $-1$
7. Sapendo che  $|f^{(4)}(x)| \leq 1/2$  per ogni  $x \in [-7, 7]$ , stimare l'errore

$$\left| f(x) - \left( -(x+1) - (x+1)^2 + 3(x+1)^3 \right) \right|$$

per  $x \in [-1, 0]$ .

**Prova scritta di Analisi Matematica I - C.d.L. Civile**  
**Anno accademico 2002-2003**

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

1. Enunciare il teorema di Lagrange e spiegarne il significato geometrico
2. Sia  $f(x) = \begin{cases} 2x & x < -\pi/2 \\ \sin(x) & x \geq -\pi/2 \end{cases}$  e sia  $G(x) = \int_0^x f(t) dt$

Senza calcolare l'integrale rispondere alle seguenti domande.

- a. Determinare il dominio di  $G$ , in quali punti è continua e in quali punti è derivabile
- b. Determinare la natura degli eventuali punti singolari
- c. Determinare gli intervalli di crescita e decrescenza
- d. Disegnare il grafico di  $G$

Calcolare  $G(x)$