Analisi Matematica I - C.d.L. Civile

Prove scritte date nell' anno accademico 2002-2003

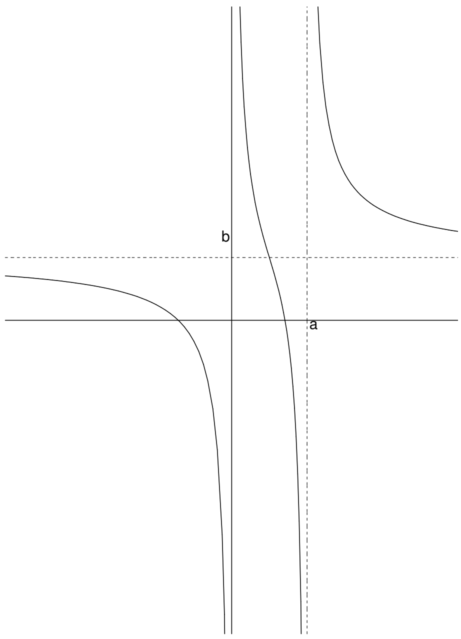
1 Prove con punteggio alto al test

Prova 1

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Usando la prima parte del teorema fondamentale del calcolo (sulla derivata di una funzione integrale), dimostrare la seconda parte (sul calcolo dell'integrale orientato, nota una qualsiasi primitiva).

ES.2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione il cui grafico e' disegnato nella seguente figura



dove gli asintoti, diversi dall'asse y, hanno equazione $x = 2$ e $y = 2$, cioe' $a = b = 2$. Rispondere ai seguenti punti sulla funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

a. Determinare il dominio

b. Determinare l'esistenza di massimi e minimi locali e globali.

c. Determinare l'esistenza di flessi.

d. Cosa si puo' dire degli asintoti orizzontali e verticali? Sapendo che

$$\lim_{x\to 2^-} (x-2)f(x) = 1$$

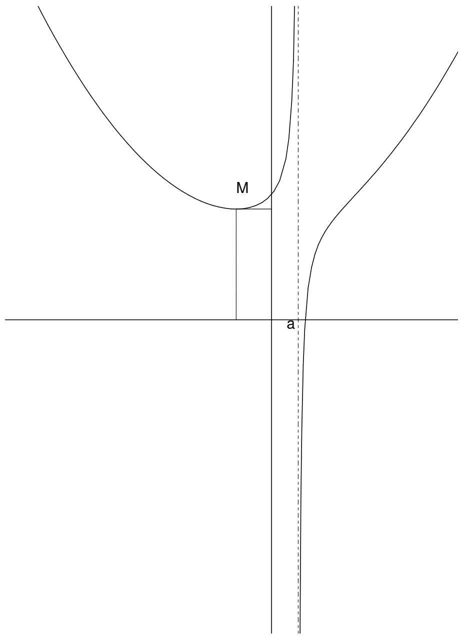
possiamo affermare che abbiamo un asintoto verticale?

e. Disegnare i possibili grafici di F

Prova 2

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione il cui grafico e' disegnato nella seguente figura



dove $M \equiv (-3/2, 6)$ e l'asintoto, diverso dall'asse y, ha equazione $x = 1$. Rispondere ai seguenti punti sulla derivata f' di f.

a. Determinare il dominio.

b. Determinare l'esistenza di zeri.

c. Determinare la crescenza e decrescenza.

d. Disegnare, per quanto possibile, il grafico.

ES.2 Enunciare il teorema dei valori intermedi (o degli zeri) e usarlo per dimostrare che un polinomio di terzo grado ammette almeno una radice.

Prova 3

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1

a. Scrivere il polinomio di Taylor di grado n centrato in 0 di $\exp(x)$ e indicarlo con $P_n(x)$

b. Scrivere in forma di Lagrange la differenza $\exp(x) - P_n(x)$

c. Usando il precedente punto verificare che $P_4(1)$ e' un'approssimazione per difetto di e

d. Dire cosa significa che

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = e$$

e. Dopo aver osservato la relazione fra polinomio di Taylor dell'esponenziale e le somme parziali della serie, usando il precedente punto b, verificare il punto d.

ES.2 Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n \geq 1} (\ln(1+x))^n$$

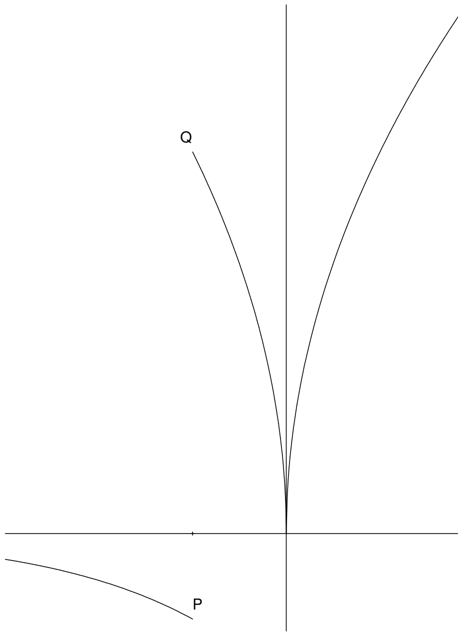
e determinarne la somma.

Prova 4

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Enunciare il teorema fondamentale del calcolo.

ES.2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione il cui grafico e' rappresentato dalla seguente figura



dove $P \equiv (-6, -1)$ e $Q \equiv (-6, 6)$. Considerare la funzione integrale

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$$

a. Determinare il dominio di F e disegnarne il grafico, in particolare indicare eventuali asintoti verticali punti di discontinuita', punti angolosi, punti a tangente verticale o cuspidi.

b. Determinare in quali intervalli F e' concava e in quali e' convessa.

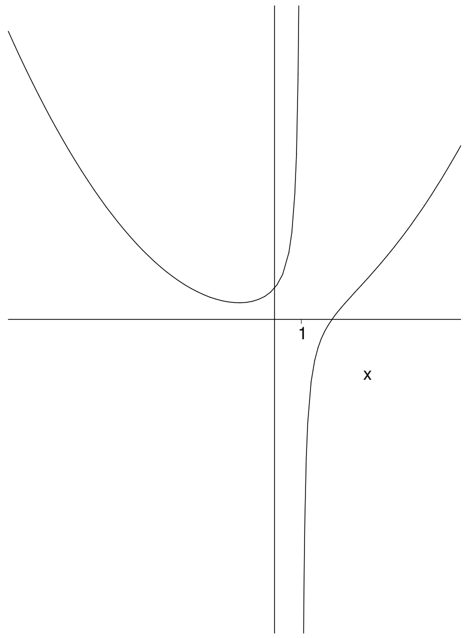
c. Spiegare perche' F non puo' avere un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, mentre lo puo' avere per $x \to -\infty$.

d. Sapendo che
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{-x^3}} = 33$$
cosa posso dire dell'asintoto orizzontale?

Prova 5

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ la cui derivata e' rappresentato dalla seguente figura



a. Specificare quali sono i punti in cui la funzione non e' derivabile ed indicare di che tipo di punti si tratta.

b. Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali massimi e minimi globali e locali.

c. Determinare gli intervalli in cui la funzione e' concava o convessa.

d. Cosa si puo' dire degli asintoti verticali e orizzontali.

e. Disegnare un possibile grafico per f

f. Cosa si puo' dire della funzione $x \mapsto \int_4^x f'(t)dt$

ES.2 Scrivere l'approssimazione di Taylor di ordine 5 centrata in 0 della funzione $\cos(x)$ col resto in forma di Lagrange ed usarla per stimare la differenza fra $\cos(1)$ e $1 - 1/2 + 1/24$.

Prova 6

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Scrivere i polinomi di Taylor di grado 2 di $\ln(1 + x)$ e di $\sqrt[3]{1+x}$ ed usarli per determinare la parte principale di $\sqrt[3]{1 + x + \ln(1 - x)}$ e per calcolare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ converge la successione

$$f_n = n^a(-3 + \ln(1 + n) + 3\sqrt{1 - n})$$

ES.2 Enunciare il teorema di Lagrange e spiegarne il significato geometrico

Prova 7

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1

a. Spiegare la relazione fra integrale di Riemann e area.

b. Dire cosa significa e verificare che l'integrale improprio

$$\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2}\, dx$$

converge. Interpretare il valore dell'integrale improprio in termini di area.

c. Dire cosa significa e verificare che l'integrale improprio

$$\int_0^{1} \frac{3}{x^2}\, dx$$

diverge. Interpretare la divergenza in termini di area.

ES.2 Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|^a}{e^x - 1/(1-x)}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|^a}{e^x - 1/(1-x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{|x|^a}{e^x - 1/(1-x)}$$

2 Prove con punteggio insufficiente al test

Solo negli appelli di Febbraio (vedi le regole d'esame). Negli appelli successivi gli esercizi 1 e 2 sono stati usati con punteggio basso e gli esercizi 3 e 4 con punteggio medio

Prova 1

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (-2x)^{\cos(\pi x)}$

a. Determinare il dominio.

b. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = -1$.

ES.2 Calcolare

$$\int_{-1/6}^{1/9} x^2 \cos(3\pi x) dx$$

ES.3 Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ numero e segno delle soluzioni dell'equazione

$$-e^{(x-2)^2} = k$$

ES.4 Calcolare la parte principale per $x \to 0$ della funzione

$$\frac{\cos(x) - 1}{\sqrt{2-x}}$$

Prova 2

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (3x)^{\cos(2\pi x)}$

a. Determinare il dominio.

b. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1/4$.

ES.2 Calcolare

$$\int_{-1}^{3} \frac{x}{x^2 - 1} dx$$

ES.3 Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ numero e segno delle soluzioni dell'equazione

$$3e^{(x-1)^2} = k$$

ES.4 Calcolare la parte principale per $x \to 0$ della funzione

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - x}}$$

Prova 3

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (\cos(2\pi x))^x$

a. Determinare il dominio.

b. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = -1$.

ES.2 Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = 4 - x^2$ e $y = (x - 1)^2$

ES.3 Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x) = |\exp(x - 2) - e|$ nell'intervallo $[1, 5]$.

ES.4 Calcolare la parte principale per $x \to 0$ della funzione

$$\frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - x}} - 1$$

Prova 4

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (\cos(4\pi x))^{-x}$

a. Determinare il dominio.

b. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$.

ES.2 Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 2x - 1$

ES.3 Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x) = |\exp(x + 4) - 1|$ nell'intervallo $[-5, 0]$.

ES.4 Calcolare la parte principale per $x \to 0$ della funzione

$$\frac{e^{3x}}{\sqrt{1 + 2x}} - 1$$

Prova 5

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -2\ln(4x^2 - 7) + 3x$

a. Determinare il dominio.

b. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 3$.

ES.2 Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $y = x\cos(3\pi x)$, l'asse delle x e le rette verticali $x = -1/6$ e $x = 1/9$

ES.3 Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ gli zeri della funzione

$$f(x) = \exp(|x-2|) - k$$

ES.4 Scrivere il polinomio di Taylor centrato in 0 di grado 5 della funzione $f(x) = \ln(1 + 4x^2)$. Detto $P_5(x)$ tale polinomio, scrivere il resto $R_5(x) = f(x) - P_5(x)$ in forma di Lagrange.

Prova 6

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(3x^2 - 27) + x$

a. Determinare il dominio.

b. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = -4$.

ES.2 Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $y = x\cos(\pi x/3)$, l'asse delle x e le rette verticali $x = -1$ e $x = 1/2$

ES.3 Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ gli zeri della funzione

$$f(x) = \exp(-|x-2|) - k$$

ES.4 Scrivere il polinomio di Taylor centrato in 0 di grado 5 della funzione $f(x) = \cos(4x)$. Detto $P_5(x)$ tale polinomio, scrivere il resto $R_5(x) = f(x) - P_5(x)$ in forma di Lagrange.

Prova 7

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -2\arcsin(4x^2 - 7) + 3x$

a. Determinare il dominio.

b. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 3$.

ES.2 Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $y = x\cos(3x)$, l'asse delle x e le rette verticali $x = -\pi/6$ e $x = \pi/9$

ES.3 Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x) = \exp(|x-2|)$ nell'intervallo $[1, 5]$.

ES.4 Scrivere il polinomio di Taylor centrato in 0 di grado 3 della funzione $f(x) = \ln(2 + x) + x$. Detto $P_3(x)$ tale polinomio, scrivere il resto $R_3(x) = f(x) - P_3(x)$ in forma di Lagrange.

Prova 8

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{\sqrt{3x^2 - 27} + x}$

a. Determinare il dominio.

b. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 3$.

ES.2 Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $y = x\cos(x/3)$, l'asse delle x e le rette verticali $x = -\pi$ e $x = \pi/2$

ES.3 Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x) = \exp(-|2x + 4|)$ nell'intervallo $[-5, 0]$.

ES.4 Scrivere il polinomio di Taylor centrato in 0 di grado 3 della funzione $f(x) = \sin(-2x) - 3x^2$. Detto $P_3(x)$ tale polinomio, scrivere il resto $R_3(x) = f(x) - P_3(x)$ in forma di Lagrange.

3 Prove con punteggio basso al test

Prova 1

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(x^2 - 5) + 3x$

a. Disegnare il grafico

b. La funzione ammette massimo o minimo globale? Ammette massimi o minimi locali?

c. Determinare l'immagine e se esistono intervalli su cui la funzione e' invertibile

d. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ numero e segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Prova 2

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Disegnare il grafico di $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$.

ES.2 Scrivere il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione $\sqrt{1 + x}$.

ES.3 Usando il precedente polinomio, calcolare limite destro e sinistro per $x \to 0$ della funzione

$$\frac{f(x) - 1 - x/2}{x^2}$$

Prova 3

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Facendo uso del grafico della funzione arcsin, che deve supporsi noto, e del concetto di traslazione, disegnare il grafico di $f(x) = \arcsin(x - 5) + 1$.

ES.2 Determinare l'area della parte limitata di piano compresa fra il grafico della precedente funzione e la retta congiungente i punti del suo grafico di ascissa $x = 9/2$ e $x = 11/2$.

4 Prove con punteggio medio al test

Prova 1

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Facendo uso del grafico della funzione arctan, che deve supporsi noto, e dei concetti di simmetria e traslazione, disegnare il grafico di $f(x) = |\arctan(x) - 1|$.

ES.2 Determinare l'area della parte limitata di piano compresa fra il grafico della precedente funzione e la retta congiungente i punti $P \equiv (-1, f(-1))$ e $Q \equiv (1, f(1))$

Prova 2

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Facendo uso del grafico della funzione arctan, che deve supporsi noto, e dei concetti di simmetria e traslazione, disegnare il grafico di $f(x) = |\arctan(x-1)| - 1$. In particolare determinare le eventuali cuspidi e gli eventuali punti angolosi.

ES.2 Determinare il massimo e il minimo della funzione nell'intervallo $[1 - \sqrt{3}, 2]$.

Prova 3

Rispondere ai seguenti quesiti giustificando le risposte.

ES.1 Sia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(x^2 - 16) + 3$

a. Disegnare il grafico di f

b. Senza calcolare l'integrale determinare il dominio e disegnare il grafico di

$$G(x) = \int_{20}^{x} f(t)dt$$

c. Calcolare $G(x)$.