Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I

Lezioni A.A. 2002/2003 , prof. G. Stefani
secondo semiperiodo 25/11/02-25/1/03

Testo consigliato: Robert A. Adams - Calcolo differenziale 1 - Casa Editrice Ambrosiana

Il registro delle lezioni contiene gli argomenti svolti a lezione ed alcuni suggerimenti su come usare il testo. Occasionalmente saranno proposti esercizi. Se non specificato altrimenti i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono al testo consigliato.

1 26-27/11. Paragrafi 6.1-5, 6.7

Martedi' 26/11
50. Il simbolo di sommatoria $\sum_{k=1}^{n} a_k$, esempi:

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n\,, \quad \sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2\,, \quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad x \neq 0, 1$$

Il problema del calcolo delle aree. Somme di Riemann per le funzioni continue su intervalli limitati.
51. L'integrale di Riemann (sul testo chiamato integrale definito): definizione. Il caso delle funzioni limitate e non continue. L'integrale orientato e suo significato geometrico in termini di area. Area compresa fra i grafici di due funzioni. Integrale di funzioni pari e dispari, indipendenza rispetto alle traslazioni orizzontali. Proprieta': linearita', additivita' rispetto all'intervallo, monotonia, disuguaglianza triangolare (continuita').
Esercizio proposto. Calcolare usando il significato geometrico e le proprieta' dell'integrale:

$$\int_{-4}^{1} (2+x)\,dx, \ \int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx, \ \int_{-3}^{3} \sqrt{18-2x^2}\,dx, \ \int_{-1}^{3} 2+\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

Mercoledi' 27/11
52. Integrabilita' delle funzioni continue e continue a tratti e teorema del valor medio per le funzioni continue (senza dimostrazione).
53. Il teorema fondamentale del Calcolo Differenziale (Teorema 5 del Cap.6) e suo significato. Esistenza di primitive per le funzioni continue su intervalli.
Rileggere la tabella di derivazione delle funzioni elementari
54. Esempio: studio delle funzioni

$$f(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{s}\,ds \quad g(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{s}\,ds$$

Esercizio proposto: studiare le le funzioni integrali di

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x-1}$$

2 3-4/12. Paragrafi 6.5, 4.2-4

Martedi' 3 Dicembre
55. Dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo
Attenzione: In alcuni testi il teorema 5 del cap. 6 e' diviso in due parti: la Parte I, che riguarda l'esistenza di primitive ed il legame fra il problema delle aree e la derivazione,

viene chiamata Teorema fondamentale del calcolo; la Parte II, conseguenza della Parte I e che riguarda un possibile metodo per il calcolo delle aree, viene chiamata Formula fondamentale del calcolo.
Esempi: 1) calcolare l'area della parte di piano compresa fra il grafico $y = \cos(x)$, l'asse x e le rette $x = \pi/4,\ x = 5\pi/6$
2) calcolare l'area della parte limitata di piano compresa fra i grafici $y = x^3$ e $y = x$
56. Continuita' e derivabilita' della funzione integrale nel caso di funzioni integrabili e non continue. Es: le funzioni integrali della funzione $y = \mathrm{sgn}(x)$
Riguardare le proprieta' di esponenziali e logaritmi.
Mercoledi' 4 Dicembre
57. Definizione del logaritmo naturale e del numero e. La funzione exp, la sua derivata e l'identita' $\exp(x) = e^x$ (senza dimostrazione). L'identitá

$$a^x \equiv e^{x\ln(a)} \equiv \exp(x\ln(a))$$

58. Studio delle funzioni con base ed esponente variabile mediante l'identita'

$$f(x)^{g(x)} \equiv \exp(g(x)\ln(f(x))) \equiv e^{g(x)\ln(f(x))}$$

Riepilogo delle proprieta' di logaritmi ed esponenziali e confronto con $\ln, \exp$. Grafici delle funzioni logaritmo ed esponenziale
59. Esercizi: 1) studiare e calcolare le funzioni integrali di

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 1 \\ x - 2 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

2) Primitive di $1/x \quad x < 0$.
3) Calcolare l'area della parte di piano delimitata da $y = \frac{x-3}{x},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 5$

3 10-11/12. Paragrafi 6.6, 7.1-3

Martedi' 10 Dicembre. Lezioni tenute dalla Dott. Poggiolini
60. L'integrale indefinito. Regole pratiche per la ricerca di primitive: somma e moltiplicazione per una costante, esempi.
61. Integrazione per sostituzione, esempi. Primitive di alcune funzioni razionali.
Mercoledi' 11 Dicembre. Lezioni non tenute per assemblee studenti

4 17-18/12. Paragrafi 5.5,6, 11.4,5

Martedi' 17 Dicembre. Lezioni tenute dalla Dott. Poggiolini
62. Integrazione per parti, esempi
63. Primitive delle funzioni razionali con denominatore di grado ≤ 2, esempi.
Mercoledi' 18 Dicembre.
64. Forme indeterminate e formula di De L'Hopital per il calcolo dei limiti. Esempi

$$\lim_{x\to 0} x^a \ln(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\exp(x)}$$

Definizione di $n!$ (pg. 142 del testo). Esempio: $D^k x^n = \frac{n!}{k!} x^{n-k}$
65. Approssimazione di Taylor con resto in forma di Lagrange e di Peano e loro significato in termini di approssimazione. Polinomi di Taylor delle funzioni

$$\exp(x), \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad \ln(1+x),$$

66. Esercizi sul calcolo dei limiti mediante l'approssimazione di Taylor e sulla relazione fra derivate e polinomio di Taylor

5 7-8/01/03. Paragrafi 11.3,4,5

Martedi' 7 Gennaio
67. Un'applicazione dell'approssimazione di Taylor: Binomio di Newton e coefficienti binomiali (teorema binomiale nel par.11.5 del testo,). Il triangolo di Tartaglia.
68. Approssimazione di Taylor di $(1+x)^r$, $r \in \mathbb{R}$ (serie binomiale nel par.11.5 del testo; il polinomio di grado n e' la somma arrestata al monomio di grado n)
Mercoledi' 8 Gennaio
69. Alcuni complementi sui limiti delle funzioni composte: cambiamento di variabile. Esempio: limite per $x \to 0$ di $\exp(-x^2)/x^r$. Esercizio: grafico di $y = \exp(-x^2)$, estesa per continuita' a 0 e verifica che ogni suo polinomio di Taylor centrato in 0 e' il polinomio nullo.
70. Parte principale di una funzione per $x \to x_0$ (sul testo non e' definita)
Definizione. Sia f una funzione continua in x_0, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$. Si dice che $a(x-x_0)^r$ e' la parte principale di f per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{a(x-x_0)^r} = 1$$

Inoltre se $r > 0$ si dice che f e' un infinitesimo di ordine r per $x \to x_0$.
Osservazioni.

- Non tutte le funzioni hanno parte principale, ad esempio $x \ln(x)$ e $\exp(-1/x^2)$ (estese per continuita' a 0) per $x \to 0$.
- La parte principale di $(f(x) - f(x_0))$, quando esiste, esprime la maniera di andare a 0 a dell'incremento.
- Se $f \in C^\infty$ in un intorno di x_0 ed ha parte principale per $x \to x_0$, allora la sua parte principale e' il primo termine non nullo di ogni polinomio (non nullo) di Taylor centrato in x_0. Si noti che $\exp(-1/x^2)$ e' una funzione C^∞ che ha tutte le derivate in 0 uguali a 0.

71. Calcolo delle forme indeterminate dei limiti mediante la parte principale (sul testo: Forme indeterminate pg.614 par.11.3). Calcolo dei polinomi di Taylor mediante la conoscenza di polinomi di Taylor noti, esempi.

6 14-15/01/03. Paragrafi 10.1,2 e 7.5

Martedi' 14 Gennaio
72. Successioni e loro limite, esempi (par. 10.1 del testo). I limiti

$$\frac{x^n}{n!} \to 0, \quad \frac{n^n}{n!} \to \infty$$

73. Serie numeriche e loro somma, somma delle serie geometrica (par. 10.2 del testo).
Mercoledi' 15 Gennaio
74. Integrali impropri sulla semiretta e sull'intervallo (par. 7.5 dell testo). Calcolo degli integrali impropri

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^r} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^r} dx$$

75. Alcuni criteri per la convergenza di integrali impropri di funzioni positive (par. 7.5 dell testo).
76. Relazione fra le serie a termini positivi e gli integrali impropri: la serie armonica e la serie armonica generalizzata (par. 10.3 dell testo).

7 21-22/01/03. Paragrafi 11.4,5

Martedi' 21 Gennaio
77. Esercizi
78. Esercizi
Mercoledi' 22 Gennaio
79. Esercizi
80. Esercizi
81. Esercizi