Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Analisi Matematica I

Lezioni A.A. 2002/2003 , prof. G. Stefani
primo semiperiodo 23/9/02-9/11/02

Testo consigliato: Robert A. Adams - Calcolo differenziale 1 - Casa Editrice Ambrosiana

Il registro delle lezioni contiene gli argomenti svolti a lezione ed alcuni suggerimenti su come usare il testo. Occasionalmente saranno proposti esercizi. Se non specificato altrimenti i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono al testo consigliato.

1 24-26/9. Paragrafi P.1,2,4,5

Martedi' 24/9
1. Prerequisiti al corso si trovano nei paragrafi P.1, P.2, P.3, P.6 del capitolo P Preliminari e nel paragrafo 4.2 del capitolo 4 Le funzioni trascendenti.
Numeri reali, naturali o interi positivi, interi, razionali e notazioni insiemistiche

$$x \in \mathbb{R},\ \mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q}$$

La retta reale. Proprieta' di ordine. proprieta' di completezza dei numeri reali, es: $\sqrt{2}$ e' l'unico numero reale positivo il cui quadrato e' 2, π e' il rapporto fra semicirconferenza e raggio.
2. Valore assoluto e distanza, intervalli (aperti, chiusi, semiaperti) e loro estremi, intervalli limitati e infiniti (semirette). **Attenzione:**

sul testo gli intervalli con estremi reali sono detti **finiti**, noi li chiameremo **limitati**

Lunghezza o misura di un intervallo limitato. Esercizio: trovare centro (punto medio) e raggio di un intervallo limitato.
Rappresentazione grafica di intervalli e soluzioni di disequazioni e sistemi di disequazioni.
Esempio: $|x+3| < |x-4|$, da risolvere tenendo conto che $|a-b|$ rappresenta la distanza tra a e b.
Mercoledi' 25/9
3. Implicazioni, ipotesi, tesi, dimostrazione, condizione necessaria, condizione sufficiente.
Esempio: $\sqrt{2}$ non e' razionale. Questa affermazione puo' essere espressa come

$$x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2 \text{ (ipotesi) } \Rightarrow x \notin \mathbb{Q} \text{ (tesi)},$$

si puo' equivalentemente dire che $x \notin \mathbb{Q}$ e' condizione necessaria perche' $x^2 = 2$, oppure che $x^2 = 2$ e' condizione sufficiente affinche' x sia irrazionale ($x \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \in \mathbb{I}$).
Coordinate cartesiane nel piano. Grafici di equazioni, esempi: retta, circonferenza.
4. Funzioni: definizione e notazione di $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$, dominio, codominio, immagine. Funzioni reali di una variabile reali: grafici, **convenzione sul dominio**. La funzione **radice quadrata** $x \mapsto \sqrt{x}$, dominio e grafico. Dominio della funzione $x \mapsto \sqrt{x^2-2}$
5. Esercizi:
1) risolvere al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la disequazione $|x-a| \leq b$ ($< b$)
2) risolvere la disequazione $\frac{3x+5}{x-7} \leq \frac{x}{x-1}$
Giovedi' 26/9
6. Esercizi sul segno di polinomi e funzioni razionali: determinare le soluzioni di

$$\frac{2x^2-4x}{x+7} \geq 0 \quad 3x+5 \leq 3 \ e \ x+7 > 0 \quad , \quad 3x+5 \leq 3 \ e \ x-7 > 0$$

Funzioni pari, dispari. Esempi: x^{2n}, x^{2n+1}
7. Operazioni fra funzioni: somma, differenza, prodotto e quoziente, composizione (porre particolare attenzione sul dominio della funzione composta). Esempio:
1) date $f(x) = -x^2$, $g(x) = \sqrt{x-1}$ allora $g \circ f$ non e' definita.
2) date $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-1}$ allora $f \circ g(x) = x - 1$ con dominio $[1, +\infty)$ e $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ con dominio $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
Esercizio da svolgere: date $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$, $h : x \mapsto 1/x$, calcolare $f \circ g$, $g \circ f, h \circ h$, specificando il dominio.
Esercizio: studio approssimato della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ mediante le proprieta' dei numeri reali.

2 1-3/10. Paragrafi P.3,6 e 1.1,2,3,5

Martedi' 1/10
8. Funzioni definite a tratti, esempi: il valore assoluto, la funzione segno, la funzione parte intera.
Attenzione:

- in alcuni testi sgn(x) e' definita anche in 0, cioe' $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} x/|x| & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$
- Nel primo rigo dell'esempio 11 pg.39 sostituire maggiore a minore. Lasciando minore non si definisce nessuna funzione, perche'?

Esercizio svolto: disegnare il grafico di $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{se} \quad x < 3 \\ 1/x & \text{se} \quad 3 \leq x \leq 4 \\ x^2/4 & \text{se} \quad x > 4 \end{cases}$.

9. Circonferenza, cerchio, ellisse iperbole, parabola riferite agli assi
Misura dell'angolo in radianti. La funzione $\sin(x)$.
Mercoledi' 2/10
10. Esercizio sul significato della fuzione sin e sul problema della propagazione dell'errore: calcolo approssimato di sin(90).
I grafici delle funzioni trigonometriche e le loro proprieta':

$$\sin(x)\ ,\ \cos(x)\ ,\ \tan(x)\ ,\ \cot(x).$$

Funzioni periodiche.
11. Il procedimento di limite. Limiti di funzioni definite su intervalli: definizione intuitiva e formale, esempi.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) - L = 0.$$

$$\lim_{x\to a} c = c, \quad \lim_{x\to a} x = a$$

12. Limite destro e sinistro e loro relazione con il limite. Esempi:

$$\lim_{x\to 0^\pm} \mathrm{sgn}(x) = \pm 1, \quad \lim_{x\to n^\pm} [x].$$

Giovedi' 3/10
13. Esercizi:

$$\lim_{x\to a} x^2 = a^2, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

Localizzazione del limite, cioe' dipendenza del valore limite solo dai valori della funzione in un intorno di a, a escluso.

14. Limiti infiniti. Esempio: $1/x^n$
Attenzione: in alcuni testi si distingue fra $+\infty$ e ∞, noi, seguendo il testo, faremo la seguente

$$\textbf{convenzione:} \qquad \infty = +\infty$$

Esercizio proposto: riflettere sull'esistenza di $\lim_{x\to 0^\pm}\sin(1/x)$ e cercare di verificare che $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$

3 8-10/10. Paragrafi 1.2,3,4

Martedi' 8/10
15. Limiti all'infinito. Esempi: $1/x^n$, $\sin(x)$
Proprieta' dei limiti (senza dimostrazione): unicita', compressione (teorema dei carabinieri), permanenza del segno e monotonia. Esempi: $\sin(1/x)$, $x\sin(1/x)$. Asintoti verticali e orizzontali
16. Regole per il calcolo dei limiti: somma, prodotto, quoziente, radice, vedi anche le tabelle nella **sezione 8**. Limiti di polinomi.
Mercoledi' 9/10
17. Limiti delle funzioni razionali. Funzioni continue in un punto e in un intervallo. Funzioni continue a destra e a sinistra.
18. Continuita', grafici e limiti delle funzioni elementari (senza dimostrazione)

$$x^n, \quad 1/x^n, \quad \sqrt[n]{x}, \quad |x|, \quad \mathrm{sgn}(x), \quad [x], \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad \tan(x)$$

19. Costruzione di funzioni continue: somma, prodotto, quoziente, composizione. Estensioni continue e discontinuita' rimovibili. Esempi:

$$\frac{x^2-1}{x-1}, \ \frac{\sin(x)}{x}$$

Continuita' delle funzioni definite a tratti.
Giovedi' 10/10
20. Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: divisione di polinomi.
21. Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: esercizi sui limiti delle funzioni razionali.

4 15-17/10. Paragrafi 1.4 e 2.2,3

Martedi' 15/10
22. Esercizi ed esempi, fra cui $x\sin(1/x)$, $\sin(1/x)$.
23. Teorema di permanenza del segno per le funzioni continue. Proprieta' delle funzioni continue sugli intervalli (senza dimostrazione): il teorema dei valori intermedi (radici di equazioni) e conseguenze sul segno delle funzioni continue.
Mercoledi' 16/10.
24. Definizione di massimo e minimo di una funzione sul dominio e in un intervallo. Proprieta' delle funzioni continue sugli intervalli (senza dimostrazione): il teorema di Weierstrass (esistenza di massimi e minimi). Esempi: $-1/x$ su $(0,\infty)$ e $[1,2]$
25. Estremi superiore e inferiore di una funzione nel suo dominio e in un intervallo. Immagine di una funzione continua su un intervallo. Esempi : $1/x$, $2x-x^2$, determinare la massima (minima) area dato il perimetro $2p$ di un rettangolo non degenere

$$A = x(p/2-x) = -(x-p/4)^2 + p^2/16.$$

26. Esempi ed esercizi: esistenza del massimo (o del minimo) di polinomi di grado pari,

esistenza di almeno una radice dei polinomi di grado dispari.
Esercizio proposto: cosa si puo' dire del seguente problema con la teoria fin qui svolta? Determinare il minimo (massimo) perimetro di un rettangolo, data l'area A

$$p = 2(x + A/x)$$

Giovedi' 17/10.
27. Rapporto incrementale di una funzione in un punto e suo significato geometrico. Riflettere sulla seguente affermazione: una funzione e' continua se e solo se $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e' una forma indeterminata.

Attenzione: Il rapporto incrementale sul testo e' chiamato il rapporto di Newton.

Definizione di derivata in un punto, funzione derivata. Derivata e retta tangente, derivata e approssimazione lineare.
28. Derivata delle funzioni x^n, $\sqrt[n]{x}$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $|x|$, esercizio proposto: calcolare la funzione derivata di $[x]$. Derivata di somma e prodotto.

5 22-24/10. Paragrafi 2.3,4,5 e 3.3,4

Martedi' 22/10
29. Derivata del quoziente e della composizione, esempi ed esercizi.
30. La funzione x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ e la sua derivata. Punti singolari (dove non esiste derivata), critici (dove la derivata e' nulla). Punti interni ed estremi del dominio. Tangenti verticali, cuspidi e punti angolosi.
Mercoledi' 23/10.
31. Teorema di Fermat (teorema 2, pg. 157 del testo) con dimostrazione. Ricerca di massimi e minimi di funzioni.
32. Massimi e minimi locali o relativi. Esempi ed esercizi sulla ricerca di massimi e minimi globali e locali di funzioni su intervalli.
33. Esercizi: domini, studio dell'immagine di funzioni razionali.
Giovedi' 24/10.
34. Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: esercizi sulle derivate delle funzioni definite a tratti, su rette tangenti e massimi e minimi.
35. Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: correzione di alcuni esercizi del test di esercitazione.

6 29-31/10. Paragrafi 5.1-4 , 2.7,9, 3.1

Martedi' 29/10.
36. Il teorema del valor medio o di Lagrange e sua interpretazione geometrica e in termini di stima dell'errore. Esempi: $0 \leq |\cos(x) - \cos(0)| = 1 - \cos(x) \leq |x|/2$, se $|x| < \pi/6$ e inoltre esistono x_0, y_0 con $|y_0| \leq |x_0| \leq |x|$ tali che

$$0 \leq |\cos(x) - \cos(0)| = 1 - \cos(x) = |\sin(x_0)x| = |\cos(y_0)x_0 x| \leq x^2.$$

Riflettere sul fatto che che la seconda disuglianza da' una stima dell'errore migliore della prima se $|x| < 1/2$, tenere conto che $\pi/6 \approx 0.52$. In seguito vedremo che la stima puo' essere ancora migliorata.
37. Esercizio sull'approssimazione: stima dell'errore $|\sin(90) - \sin(90 - [90/6.28]6.28)|$ mediante l'errore $|\pi - 3.14|$
Teorema di Rolle e relazione fra gli zeri di f e f'.
Mercoledi' 30/10.

38. Funzioni crescenti e decrescenti su intervalli, test della derivata prima, esempi. Studio del grafico di una cubica.
39. Funzioni con derivata nulla. Primitive (antiderivate, Par.2.9) di una funzione continua su un intervallo, esempi

Attenzione: nel testo una primitiva e' chiamata un'antiderivata

40. Definizione di funzioni convesse e concave su intervalli in termini di corde e tangenti al grafico, test della derivata seconda.

Attenzione : sul testo le funzioni convesse vengono chiamate con la concavita' verso l'alto e le funzioni concave con la concavita' verso il basso

Esercizi: studio del grafico delle funzioni $\sqrt{|x-3|}$ e $\mathrm{sgn}(x-3)\sqrt{|x-3|}$ mediante il calcolo delle derivate e con traslazione orizzontale e simmetrie a partire dal grafico di $\sqrt{x}$. Studio del grafico della funzione $(x+3)/(x+1)$ per traslazione orizzontale e verticale a partire dal grafico di $1/x$.
Giovedi' 31/10.
41. Derivate di ordine superiore, funzioni $C^r(A)$ e $C^\infty(A)$.
Studio del grafico di una funzione razionale e sua relazione con le soluzioni di equazioni associate.
42. Studio del problema della caduta dei gravi (Par.3.1): equazioni differenziali, condizioni iniziali, soluzione. **Caduta dei gravi.** In un qualsiasi riferimento cartesiano con asse z coincidente con la verticale ascendente, se si trascura la resistenza dell'aria, le equazioni differenziali sono

$$\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = 0,\ \ddot{z} = -g.$$

Scegliendo opportunamente il sistema cartesiano, si puo' sempre ipotizzare che al tempo 0 il grave si trovi nel punto $P_0 = (0, 0, z_0),\ z_0 \geq 0$, ed abbia velocita' $\vec{v}_0 = (a, 0, b),\ a \geq 0$, dove $a\,\vec{\imath}$ e' la velocita' orizzontale e $b\,\vec{k}$ e' la velocita' verticale. Si ottengono le condizioni iniziali

$$x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ z(0) = z_0,\ \dot{x}(0) = a,\ \dot{y}(0) = 0,\ \dot{z}(0) = b.$$

Il teorema di Lagrange ci permette di determinare l'equazione di moto del grave

$$x(t) = a\,t,\ y(t) = 0,\ z(t) = z_0 + b\,t - g\,\frac{t^2}{2}.$$

Si noti che il moto e' verticale se e solo se $a = 0$ e che se $a \neq 0$ la traiettoria e' una parabola nel piano verticale che contiene $\vec{v}_0$. Le equazioni della parabola sono

$$z = z_0 + \frac{b}{a}\,x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{a^2}$$

Esercizio proposto. Si determini l'equazione della traiettoria $z = f(x)$ in funzione del modulo (intensita') di $\vec{v}_0$, e dell'angolo (orientato) che la velocita' iniziale forma con il piano orizzontale. Si disegnino i possibili grafici della traiettoria, considerando che il piano terra abbia quota $z = 0$. Che significato ha l'approssimazione lineare della traiettoria in $x = 0$?

7 5-7/11. Paragrafi 3.1, 4.1,5

Martedi' 5/11
43. Esempio di approssimazione lineare delle piccole variazioni: equazione di moto per le piccole oscillazioni del pendolo, cenni sulle equazioni differenziali e i problemi ai valori

iniziali
Le equazioni. Detta $\omega(t)$ la misura orientata in radianti formata da un pendolo di lunghezza ℓ con la verticale, decomponendo la forza peso nella direzione del pendolo e nella sua ortogonale si ottiene per le equazioni di moto

$$\ell\ddot{\omega}(t) = -g\sin(\omega(t))$$

Si parla di piccole oscillazioni (intorno al punto di equilibrio) quando nell'equazione di moto si sostituisce alla funzione seno la sua approssimazione lineare in 0, ottenendo

$$\ddot{\omega}(t) = -\frac{g}{\ell}\,\omega(t)$$

Riflettere sul fatto che le equazioni di moto valgono per la misura in radianti e non per la misura in gradi.
44. Esempi ed esercizi sulla caduta dei gravi e sulle oscillazioni del pendolo.
Mercoledi' 6/11
45. Esercizi
46. Esercizi
47. Esercizi
Giovedi' 7/11
48. La fuzione inversa e la sua derivata. Esempi.
49. Le funzioni trigonometriche inverse e le loro derivate. $\arccos, \arcsin, \arctan$

8 Operazioni con i limiti

Al fine di facilitare la memorizzazzione dei risultati, descriviamo le relazione esistenti fra l'operazione di limite e le operazioni fondamentali fra funzioni mediante delle tabelle. Supponiamo che

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lambda_1 \quad , \quad \lim_{x\to\alpha} g(x) = \lambda_2$$

dove sia α che λ_1, λ_2 possono essere numeri reali o uno dei simboli introdotti, cioè

$$\alpha = a \in \mathbb{R},\ a^-,\ a^+,\ \pm\infty,$$

$$\lambda_1,\ \lambda_2 = L \in \mathbb{R},\ \pm\infty$$

Tabella per la somma di limiti

Si ha

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) + g(x) = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$$

con λ somma di numeri reali o definito dalla seguente tabella

$$\pm\infty + L = L \pm \infty = \pm\infty, \quad \forall L \in \mathbb{R}$$
$$\infty + \infty = \infty, \qquad -\infty + (-\infty) = -\infty$$
$$\infty + (-\infty) \quad \text{e} \quad -\infty + \infty \quad \textbf{non sono definiti}$$

Tabella per il prodotto di limiti

Si ha

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = \lambda_1\lambda_2 = \lambda$$

con λ prodotto di numeri reali o definito dalla seguente tabella

$$\infty\,\infty = (-\infty)(-\infty) = \infty$$
$$\infty\,(-\infty) = (-\infty)\,\infty = -\infty$$

$$L\,\infty = \infty\,L = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad L > 0 \\ \textbf{non è definito} & \text{se} \quad L = 0 \\ -\infty & \text{se} \quad L < 0 \end{cases}$$

$$L\,(-\infty) = -\infty\,L = \begin{cases} -\infty & \text{se} \quad L > 0 \\ \textbf{non è definito} & \text{se} \quad L = 0 \\ +\infty & \text{se} \quad L < 0 \end{cases}$$

Tabella per il reciproco del limite

Conviene definire

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0^{\pm}$$

se $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$ e $f(x)$ e' positiva (rispettivamente negativa) vicino a zero. Si ha

$$\lim_{x\to\alpha} 1/f(x) = 1/\lambda_1$$

con $1/\lambda_1$ reciproco di un numero reale diverso da zero o definito dalla seguente tabella

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{\infty} = 0^{+}, \quad \frac{1}{-\infty} = 0^{-}$$

$$\frac{1}{0^{+}} = \infty, \quad \frac{1}{0^{-}} = -\infty$$

$$\text{per} \quad \frac{1}{0} \quad \text{si puo' dire solo} \quad \lim_{x\to\alpha} \frac{1}{|f(x)|} = \infty$$

Dalle tabelle del prodotto e del reciproco, ricavare la **tabella del quoziente** .
I simboli

$$-\infty + \infty \quad , \pm\infty\, 0 \quad , \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad , \frac{0}{0}$$

sono dette **forme indeterminate** perche' in questi casi i rispettivi limiti possono assumere qualsiasi valore.