1. Data la funzione $f(x) = \tan(\sqrt{x})$, detetminarne il dominio e l'insieme dei punti in cui e' derivabile. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(\pi^2/9, f(\pi^2/9))$

2. Disegnare il grafico di $f(x) = \arctan(2x)$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(\sqrt{3}/2, f(\sqrt{3}/2))$

3. Determinare il dominio e disegnare il grafico di $f(x) = x^{x-1}$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(1, f(1))$

4. Determinare il dominio della funzione
$$f(x) = (\cos(x))^x.$$
Determinare la retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0, f(0))$

5. Disegnare il grafico di $f(x) = -2\ln\left(x^3 - 5\right) + 3x$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(6, f(6))$.

6. Spiegare la relazione fra integrale orientato e area. Determinare l'area della regione di piano compresa fra l'asse x il grafico della funzione $f(x) = x\cos(2x)$ e le rette $x = 0, \quad x = \dfrac{3\pi}{4}$.

7. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 3$

8. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali di $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+5}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 2$

9. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = 4 - x^2$, e $y = (x-1)^2$.

10. Calcolare il segno della funzione $f(x) = x\cos(x/2)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione l'asse x e le rette verticali $x = -\pi/3$ e $x = \pi/2$

11. Disegnare i grafici delle funzioni $f(x) = xe^{x-2}$ e $f(x) = e^{-4}x$. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici

12. Disegnare il grafico di
$$f : x \mapsto \begin{cases} x\exp(-x) & \text{se} \quad x > 0 \\ x & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$
   (a) Spiegare perche' f ammette primitive.
   (b) Quante volte sono derivabili le sue primitive?
   (c) Disegnare il grafico della primitiva F di f tale che $F(-1) = 0$ senza calcolarla, in particolare specificare il dominio e discutere l'esistenza di massimi e minimi relativi ed assoluti e di asintoti verticali e orizzontali.
   (d) Calcolare la primitiva F di f definita nel precedente punto.

13. Sia $f(x) = \begin{cases} 2x & x < -\pi \\ \sin(x) & x \geq -\pi \end{cases}$ e sia
$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$
1) Disegnare il grafico di f.
2) Senza calcolare l'integrale, usando il teorema fondamentale del calcolo, disegnare il grafico di G.
3) Calcolare G(x) al variare di x nel dominio di G.

14. Enunciare il teorema fondamentale del Calcolo.

15. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e G una sua primitiva su $[a, b] \subset A$. Usando la prima parte del teorema fondamentale del calcolo, dimostrare che
$$\int_b^a f(x)dx = G(a) - G(b)$$

16. Considerare la funzione

$$H(x) = \int_0^{\cos(x)} \exp(-t^2)dt$$

Si scriva H come composizione di una funzione integrale e la funzione $\cos$. Usando il teorema fondamentale del calcolo e la derivata della funzione composta, determinare $H'(x)$.

17. Sia f la funzione definita da $f(x) = \displaystyle\int_1^x \arccos(\ln(t))\,dt$. Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
f definita in $[1/e, e]$
f definita in $(-\pi/2, \pi/2)$
f definita in $\mathbb{R}$
f ha minimo negativo
f ha massimo positivo
f ha per tangente al suo grafico la retta $y = (\pi/2)(x-1)$
f decrescente nel suo dominio
f ha per tangente al suo grafico la retta $y - \pi/2 = (x-1)$ nel punto di ascissa 1
f positiva per $x > 1$ nel suo dominio
f negativa per $x < 1$ nel suo dominio
f strettamente crescente nel suo dominio
f non ha minimo
f non ha massimo
f positiva per $x > 0$ nel suo dominio
f negativa per $x > 1$ nel suo dominio

18. Sia Sia $f : (0,3) \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $G(x) = \int_x^1 f(t)dt$. Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
$G'(x) = -f(x)$ in $(0,3)$
$G'(x) = f(x)$ in $(0,3)$
$G''(x) = f'(x)$ in $(0,3)$
$G''(x) = -f'(x)$ in $(0,3)$
$G'(x) = -f(x)$ in $[0,3]$
$G''(x) = -f(x)$ in $(0,3)$

19. Sia Sia $f : (0,3) \cup (5,7) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dire quali delle seguenti affermazioni e' giusta e spiegarne il perche'.
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione con derivata seconda in $(0,3)$
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,7) - \{3,5\}$
$H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione derivabile in $(0,7) - \{3,5\}$
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione derivabile in $(0,3)$
$H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione con derivata seconda in $(5,7)$
$H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,3)$
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione con derivata seconda in $(0,3) \cup (5,7)$
$H(x) = \int_6^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,3) \cup (5,7)$
$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ e' una funzione continua in $(0,7)$

20. Spiegare perche' possiamo affermare che esiste un rettangolo di area massima inscritto in un cerchio di raggio 3. Calcolare tale area.

21. Enunciare il teorema di Weierstrass (esistenza di massimi e minimi di funzioni continue) e spiegare come si possono trovare i punti di massimo e di minimo. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x) = |x^3 - 3|$ nell'intervallo $[0,5]$.

22. Disegnare il grafico di $f(x) = |x^4 - 16|$. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione nell'intervallo $[-1,5]$.

23. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione $f(x) = (x-1)^2 - 4\ln(x-1)$ nell'intervallo $\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, 5\right]$

24. A partire dal grafico di $\exp(x)$ (che deve essere noto), mediante traslazioni e simmetrie, disegnare il grafico di $f(x) = |e^x - 1|$. Determinare il massimo e il minimo della funzione nell'intervallo $[-1, 1]$

25. Usare l'approssimazione di Taylor centrata in 0 del coseno per stimare
$$\cos(1) - (1 - 1/2 + 1/24)$$

26. Sia $P_n(x)$ il polinomio di Taylor centrato in 0 di $\exp(x)$. Dimostrare che se $x > 0$ allora $P_n(x)$ e' un'approssimaxione per difetto di $\exp(x)$. Cosa posso dire se $x < 0$?

27. Definire il polinomio di Taylor centrato in 0 di ordine 2 e spiegarne le sue proprieta' di approssimazione. Calcolare il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione
$$f(x) = \frac{(1 - \ln(1 + 3x))^2}{\sqrt{2 + 3x}}$$
in $x = 0$. Si consiglia di usare le approssimazioni di Taylor di funzioni note.

28. Mediante le approssimazioni di Taylor di $\exp(y)$ e di $(1+y)^{-1/2}$ calcolare l'approssimazione di Taylor del secondo ordine della funzione
$$f(x) = \frac{(\exp(-x))^2}{\sqrt{4 + 4x}}$$
in $x = 0$ e dedurne la derivata prima e seconda in 0.

29. Calcolare l'approssimazione di Taylor del secondo ordine della funzione
$$f(x) = \frac{(1 - \sin(2x))^2}{\sqrt[3]{2 + 3x}}$$
in $x = 0$

30. a) Determinare il dominio della funzione
$$f(x) = -2\ln\left(x^3 - 5\right) + 3x.$$
b) Determinare l'approssimazione del secondo ordine della precedente funzione nel punto $x = 6$.

31. Calcolare la parte principale della funzione $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 - \sin(4x)}} - 1$, per $x \to 0$

32. Calcolare la parte principale della funzione $f(x) = \dfrac{(1 - \ln(1 + 3x))^2}{\sqrt{1 + \cos(x)}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, per $x \to 0$

33. Sapendo che la funzione
$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x},$$
estesa per continuita' a 0, e' C^∞, determinarne le derivate usando l'approssimazione di Taylor.

34. Sapendo che $f \in C^\infty(-1, 1)$ e che $f(x) = 3 + 2x^2 - x^3 + O(x^5)$, quali informazioni ho sulle derivate della f in 0?

35. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ numero e segno delle soluzioni dell'equazione
$$e^{(x-3)^2} = k$$

36. Posso affermare che la funzione $f(x) = (x - 2)^3\, e^{x+2}$ ha per immagine un intervallo? Perche'? Determinare l'immagine di f. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero ed il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

37. Determinare l'immagine di
$$(x - 1)^2 - 4\ln(x - 1).$$
Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

38. Determinare l'immagine della funzione
$$f(x) = \frac{e^{(x-2)}}{x^4}$$

39. Dare la definizione di
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$
Disegnare il grafico di una funzione definita nell'intervallo $[-1,1]$ che ha la precedente proprietá ma non ha limite per $x \to 0$

40. Scrivere i primi tre termini dell'approssimazione di Taylor centrata in 0 delle funzioni $\sin(x)$ e $\ln(1+x)$. Usando tali approssimazioni calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{|\log(1+2x) - \sin(2x)|^\alpha}{\sin(x)}$$

41. Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \left(\sin\left(\frac{3}{n}\right) - \frac{3}{n}\right)$

42. Verificare che
$$\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)} dx$$
diverge.

43. Verificare che
$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\exp(x^2)} dx$$
converge ad un numero minore di 1. Illustrare graficamente questo risultato.

44. Disegnare il grafico di $\exp(-(x-1)^2)$. Spiegare in che senso si possa considerare finita l'area della parte di piano compresa fra il grafico e l'asse x. Disegare il grafico di
$$\int_0^x \exp(-(t-1)^2)dt$$
In particolare determinare eventuali punti di massimo minimo e flesso e l'esistenza di asintoti.

45. Data la serie $\sum_{n>0} a_n$, definire il significato di " $S \in \mathbb{R}$ e' la somma della serie". Dimostrare, usando il concetto di integrale improprio che la serie $\sum_{n>0} 1/n^2$ converge ad un numero minore di...

46. Usando la somma della serie $\sum_{n\geq 0} y^n$, calcolare al variare di $x \in \mathbb{R}$
$$\sum_{n\geq 0} \exp(nx).$$