

Corsi di Laurea in Ingegneria Civile

Analisi Matematica I

Lezioni A.A. 2001/2002 , prof. G. Stefani

24/9/01-10/11/01 e 26/11/01-26/1/02

Testo consigliato: Robert A. Adams - Calcolo differenziale 1 - Casa Editrice Ambrosiana

Il registro delle lezioni contiene gli argomenti svolti a lezione ed alcuni suggerimenti su come usare il testo. Occasionalmente saranno proposti esercizi. Se non specificato altrimenti i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono al testo consigliato.

1 Settimana 25-26/9/01. Capitolo P, Preliminari

1. Mar. 25 Set.

Prerequisiti al corso si trovano nei paragrafi P.1, P.2, P.3, P.6 del capitolo P "Preliminari" e nel paragrafo 4.2 del capitolo 4 "Le funzioni trascendenti". Porre particolare attenzione alle proprietà del valore assoluto, alle equazioni e disequazioni di primo e secondo grado, alle formule di trigonometria.

Numeri reali, naturali o interi positivi, interi, razionali e notazioni insiemistiche

$$x \in \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$$

La retta reale. Proprietà di ordine e di completezza dei numeri reali. Valore assoluto e distanza, intervalli (aperti, chiusi, semiaperti) e loro estremi, intervalli limitati e infiniti (semirette). **Attenzione:**

sul testo gli intervalli con estremi reali sono detti "**finiti**", noi li chiameremo "**limitati**"

Lunghezza o misura di un intervallo limitato. Esercizio: trovare centro (punto medio) e raggio di un intervallo limitato.

Rappresentazione grafica di intervalli e soluzioni di disequazioni e sistemi di disequazioni. Esempi:

$$3x+5 \leq 3 \text{ (} < 3 \text{)} \quad , \quad 3x+5 \leq 3 \text{ e } x+7 > 0 \quad , \quad 3x+5 \leq 3 \text{ e } x-7 > 0 \quad , \quad |x+3| < 4 \text{ (} \geq 4 \text{)}$$

2. Mar. 25 Set.

Coordinate cartesiane nel piano. Grafici di equazioni e disequazioni: retta e circonferenza.

3. Mer. 26 Set.

Funzioni: definizione e notazioni: $f : A \rightarrow B$, $x \mapsto f(x)$, dominio, immagine. Funzioni reali di una (o più) variabili reali: grafici, **convenzione sul dominio**, esempio $f(x) = 1/(x^2 - 9)$. La funzione **radice quadrata** $x \mapsto \sqrt{x}$. Alcune funzioni "elementari":

$$c, |x|, x^n, \sqrt[n]{x}$$

Polinomi e funzioni razionali. Funzioni pari, dispari. Operazioni fra funzioni: somma, differenza, prodotto e quoziente.

4. Mer. 26 Set.

Composizione di funzioni. Esempi: date $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$, $h : x \mapsto 1/x$, calcolare $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ h$, specificando il dominio.

Funzioni definite a tratti, esempi: il valore assoluto, la funzione segno, la funzione parte intera.

Vedere sul testo la funzione di Heaviside e la funzione intero successivo (ceiling).

Attenzione:

- in alcuni testi $\text{sgn}(x)$ è definita anche in 0, cioè $\text{sgn}(x) = \begin{cases} x/|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

- Nel primo rigo dell'esempio 11 pg.39 sostituire maggiore a minore. Lasciando minore non si definisce nessuna funzione, perché?

5. Mer. 26 Set.

Cambio di scala e traslazione di un grafico, simmetrie e riflessioni. Esempi di grafici di funzioni deducibili da quelli delle funzioni elementari: esercizi

$$(x-2)^2 - 1, \quad \frac{x}{1-x} = -\frac{x-1+1}{x-1} = -1 - \frac{1}{x-1}$$

2 1-3/10/01. Par. 1.1-1.3, 1.5, Limiti

6. Lun. 1 Ott.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: esercizi.

7. Lun. 1 Ott.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: esercizi.

8. Mar. 2 Ott.

Misura dell'angolo in radianti. Funzioni periodiche: le funzioni trigonometriche

$$\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x).$$

Il procedimento di limite. Limiti di funzioni definite su intervalli: definizione intuitiva e formale, esempi.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - L = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a, \quad \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Limite destro e sinistro e loro relazione con il limite. Esempi: $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \operatorname{sgn}(x) = \pm 1$, $\lim_{x \rightarrow n^\pm} [x]$. Limiti all'infinito. Esempi: $1/x^n$, $\sin(x)$

Attenzione: in alcuni testi si distingue fra $+\infty$ e ∞ , noi, seguendo il testo, faremo la seguente

$$\textbf{convenzione:} \quad \infty = +\infty$$

9. Mar. 2 Ott.

Limiti infiniti. Proprietà dei limiti (senza dimostrazione): unicità, compressione (teorema dei carabinieri), permanenza del segno e monotonia.

10. Mer. 3 Ott.

Regole per il calcolo dei limiti: somma, prodotto, quoziente, radice. Limiti delle funzioni razionali.

11,12. Mer. 3 Ott

Lezioni al computer sui grafici di funzioni elementari, traslazioni, cambiamento di scala, riflessioni e limiti.

3 8-10/10/01. Par. 1.4, Continuità

13. Lun. 8 Ott.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: esercizi.

14. Lun. 8 Ott.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: esercizi.

15. Mar. 9 Ott.

Funzioni continue in un punto e in un intervallo. Teorema di permanenza del segno per le funzioni continue. Esempi di funzioni continue: i polinomi e le funzioni elementari.

Costruzione di funzioni continue: somma, prodotto, quoziente, composizione. Estensioni continue e discontinuita' rimovibili. Esempi:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad \frac{\sin(x)}{x}$$

Funzioni continue a destra e a sinistra. Continuita' di funzioni definite a tratti. Definizione di massimo di una funzione nel suo dominio e su un intervallo.

16. Mar. 9 Ott.

Proprieta' delle funzioni continue sugli intervalli (senza dimostrazione): i teoremi di Weierstrass (esistenza di massimi e minimi) e dei valori intermedi (radici di equazioni). Estremi superiore e inferiore di una funzione nel suo dominio e in un intervallo. Ricerca di soluzioni di equazioni (algoritmo di bisezione) e di immagini di funzioni.

17. Mer. 10 Ott.

Applicazioni delle proprieta' delle funzioni continue:

- segno di un polinomio e di una funzione razionale, es:

$$x^3 - x^2 - x, \quad (x - 1)/(x^2 - 4).$$

- esempi di ricerca grafica di massimi e minimi: cosa si puo' dire dei seguenti problemi con la teoria fin qui svolta? Massima (minima) area dato il perimetro p di un rettangolo non degenero

$$A = x(p/2 - x) = -(x - p/4)^2 + p^2/16.$$

Minimo (massimo) perimetro data l'area A di un rettangolo

$$p = 2(x + A/x)$$

18. Mer.10 Ott.

Lezioni al computer su limiti, funzioni continue, esistenza di massimi e minimi.

19. Mer. 10 Ott.

Incrementi e distanze nel piano. Vettori. Rapporto incrementale di una funzione in un punto e suo significato geometrico. Riflettere sulla seguente affermazione: una funzione e' continua se e solo se $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e' una forma indeterminata. Definizione di derivata in un punto.

4 15-17/10/01. Par. 2.1-7, Derivazione

20. Lun. 15 Ott.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: esercizi.

21. Lun. 15 Ott.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: esercizi.

22. Mar. 16 Ott.

Attenzione: Il rapporto incrementale sul testo e' chiamato il rapporto di Newton.

Derivabilita' e approssimazione, derivabilita' e rette tangenti al grafico di una funzione. Definizione di retta tangente e tangenti verticali, cuspidi. Esempi:

$$\text{sgn}, \quad x, \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{x}, \quad \sqrt{|x|}$$

23. Mar. 16 Ott.

Regole di derivazione: somma, prodotto per una costante, prodotto, quoziente, composizione. Derivata delle funzioni trigonometriche.

24. Mer. 17 Ott.

Funzione derivata, il valore assoluto, derivate delle radici e di

$$x^\alpha, \alpha < 0, = 0, = 1, > 1, 0 < \alpha < 1$$

Derivate di ordine superiore, le funzioni $C^k(A)$ e $C^\infty(A)$.

25. Mer. 17 Ott.

Differenziale di una funzione come approssimazione dell'incremento. Approssimazione lineare delle piccole variazioni. Esempio: equazione di moto per le piccole oscillazioni del pendolo.

Le equazioni. Detta $\omega(t)$ la misura orientata in radianti formata da un pendolo di lunghezza ℓ con la verticale, decomponendo la forza peso nella direzione del pendolo e nella sua ortogonale si ottiene per le equazioni di moto

$$\ell\ddot{\omega}(t) = -g \sin(\omega(t))$$

Si parla di piccole oscillazioni (intorno al punto di equilibrio) quando nell'equazione di moto si sostituisce alla funzione seno la sua approssimazione lineare in 0, ottenendo

$$\ddot{\omega}(t) = -\frac{g}{\ell} \omega(t)$$

Riflettere sul fatto che le equazioni di moto valgono per la misura in radianti e non per la misura in gradi.

Considerare gli esempi del par.2.6 del testo come esercizi e risolverli

26. Mer. 17 Ott.

Esercitazione: test a risposta multipla sugli argomenti svolti.

5 22-24/10/01. Par. 3.1-4, 5.1-4 , Valori estremi, Teorema di Lagrange e applicazioni

27. Lun. 22 Ott.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: derivata destra e sinistra e punti angolosi. Esercizi sulle derivate di funzioni definite a tratti

28. Lun. 22 Ott.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: esercizi sulle derivate e la ricerca di rette tangenti.

29. Mar. 23 Ott.

Punti singolari (dove non esiste derivata), critici (dove la derivata e' nulla). Punti interni ed estremi del dominio. Teorema di Fermat (teorema 2, pg. 157 del testo) con dimostrazione. Ricerca di massimi e minimi di funzioni. Massimi e minimi locali o relativi.

30. Mar. 23 Ott.

Il teorema del valor medio o di Lagrange e sua interpretazione geometrica e in termini di stima dell'errore. Esempi: $0 \leq |\cos(x) - \cos(0)| = 1 - \cos(x) \leq |x|/2$, se $|x| < \pi/6$ e inoltre esistono x_0, y_0 con $|y_0| \leq |x_0| \leq |x|$ tali che

$$0 \leq |\cos(x) - \cos(0)| = 1 - \cos(x) = |\sin(x_0)x| = |\cos(y_0)x_0| \leq x^2.$$

Riflettere sul fatto che la seconda disuguaglianza da' una stima dell'errore migliore della prima se $|x| < 1/2$, tenere conto che $\pi/6 \approx 0.52$. In seguito vedremo che la stima puo' essere ancora migliorata.

Esercizio. Verificare che la funzione $\sin(x)/x$ estesa per continuita' a 0 ha derivata 0 in $x = 0$. **Suggerimento.** Scrivere il rapporto incrementale in 0, poi applicare il teorema di Lagrange a $(\sin(x) - x)$ e quindi a $(\cos(x_0) - 1)$, infine passare al limite tenendo conto che

$$|x_0 x| \leq |x|^2$$

31. Mer. 24 Ott.

Teorema di Rolle e relazione fra gli zeri di f e f' . Funzioni con derivata nulla. Primitive (antiderivate, Par.2.9) di una funzione continua su un intervallo ed applicazione allo studio del problema della caduta dei gravi (Par.3.1): equazioni differenziali, condizioni iniziali, soluzione.

Attenzione: nel testo una primitiva e' chiamata un'antiderivata

Caduta dei gravi. In un qualsiasi riferimento cartesiano con asse z coincidente con la verticale ascendente, se si trascura la resistenza dell'aria, le equazioni differenziali sono

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g.$$

Scegliendo opportunamente il sistema cartesiano, si puo' sempre ipotizzare che al tempo 0 il grave si trovi nel punto $P_0 = (0, 0, z_0)$, $z_0 \geq 0$, ed abbia velocita' $\vec{v}_0 = (a, 0, b)$, $a \geq 0$, dove $a \vec{i}$ e' la velocita' orizzontale e $b \vec{k}$ e' la velocita' verticale. Si ottengono le condizioni iniziali

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = z_0, \quad \dot{x}(0) = a, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = b.$$

Il teorema di Lagrange ci permette di determinare l'equazione di moto del grave

$$x(t) = a t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = z_0 + b t - g \frac{t^2}{2}.$$

Si noti che il moto e' verticale se e solo se $a = 0$ e che se $a \neq 0$ la traiettoria e' una parabola nel piano verticale che contiene $\vec{v}_0$. Le equazioni della parabola sono

$$z = z_0 + \frac{b}{a} x - \frac{g}{2a^2} x^2$$

Esercizio. Si determini l'equazione della traiettoria $z = f(x)$ in funzione del modulo (intensita') di $\vec{v}_0$, e dell'angolo (orientato) che la velocita' iniziale forma con il piano orizzontale. Si disegnino i possibili grafici della traiettoria, considerando che il piano terra abbia quota $z = 0$. Che significato ha l'approssimazione lineare della traiettoria in $x = 0$?

32. Mer. 24 Ott.

Funzioni crescenti e decrescenti su intervalli. Funzioni convesse e concave su intervalli.

Attenzione : sul testo le funzioni convesse vengono chiamate con la concavita' verso l'alto e le funzioni concave con la concavita' verso il basso

33. Mer. 24 Ott.

Correzione e commenti sul test.

6 29-31/10/01. Cap. 6 , Integrazione

34. Lun. 29 Ott.

Il simbolo di sommatoria $\sum_{k=1}^n$, esempi:

$$\sum_{k=1}^n 1 = n, \quad \sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2, \quad \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad x \neq 0, 1$$

Il problema del calcolo delle aree. Somme di Riemann per le funzioni continue su intervalli limitati.

35. Lun. 29 Ott.

L'integrale di Riemann (sul testo chiamato integrale definito): definizione. Il caso delle funzioni limitate e non continue. L'integrale orientato e suo significato geometrico in termini di area. Integrale di funzioni pari e dispari, indipendenza rispetto alle traslazioni orizzontali. Proprietà: linearità, additività rispetto all'intervallo, monotonia, disuguaglianza triangolare (continuità).

Esercizio. Calcolare usando il significato geometrico e le proprietà dell'integrale:

$$\int_{-4}^1 (2+x) dx, \int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2} dx, \int_{-3}^3 \sqrt{18-2x^2} dx, \int_{-1}^3 2 + \sqrt{4-(x-1)^2} dx$$

36. Mar. 30 Ott.

Integrabilità delle funzioni continue e continue a tratti (senza dimostrazione). Teorema del valor medio per le funzioni continue (con dimostrazione).

37. Mar. 30 Ott.

Il teorema fondamentale del Calcolo Differenziale e suo significato. Esistenza di primitive per le funzioni continue su intervalli.

38. Mer. 31 Ott.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: grafici di funzioni, polinomi.

39. Mer. 31 Ott.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: grafici di funzioni, funzioni razionali.

40. Mer. 31 Ott.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: numero, segno e approssimazione degli zeri di una funzione e ricerca di massimi e minimi globali e locali.

7 5-7/11/01. Par. 7.1, Tecniche di integrazione

41. Lun. 5 Nov.

Dimostrazione del teorema e della formula fondamentale del calcolo

42. Lun. 5 Nov.

Esempio: le funzioni integrali di

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x-1}$$

Continuità e derivabilità della funzione integrale nel caso di funzioni integrabili e non continue. Es: le funzioni integrali della funzione $y = \operatorname{sgn}(x)$

43. Mar. 6 Nov.

L'integrale indefinito. Regole pratiche per la ricerca di primitive: somma e moltiplicazione per una costante, integrazione per parti e per sostituzione. Esempi: primitive di polinomi, e di $x \cos(x)$, $x \cos(x^2)$, $x\sqrt{a^2-x^2}$

44. Mar. 6 Nov.

Esercizio: studiare e calcolare le funzioni integrali di

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ x-2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

45. Mer. 7 Nov.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: antiderivate delle funzioni elementari ed esercizi.

46. Mer. 7 Nov.

Lezione tenuta dalla Dott. Poggiolini: calcolo di aree comprese fra i grafici di due funzioni.

47. Mer. 7 Nov.

Esercizi