Corso di Laurea in Ingegneria Civile-Edile-Ambiente
Analisi Matematica I - lettere E-N

Lezioni A.A. 2013/2014 prof. G. Stefani
16/9/12 - 20/12/12

In questo file sono riportati gli argomenti delle lezioni e *va essenzialmente inteso come un programma d'esame dettagliato.* Sono inoltre proposti esercizi e, occasionalmente, integrazioni o semplificazioni della teoria. Altri esercizi saranno proposti nella pagina web del corso.

Se non specificato altrimenti, i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono al testo di riferimento: *Bertsch - Dal Passo - Giacomelli, Analisi Matematica, seconda edizione, McGraw-Hill.*

Può essere usato qualsiasi testo di Analisi Matematica, usando il registro delle lezioni come indice.

I prerequisiti al corso sono elencati in dettaglio nel programma del corso. Gli argomenti verranno ripetuti al corso di recupero, che si consiglia di seguire agli studenti che hanno avuto un basso punteggio nella parte matematica del test di accesso, anche se hanno assolto il debito.

Alcuni concetti particolarmente importanti o da precisare a livello universitario saranno richiamati durante il corso, inoltre alcuni richiami si trovano anche sul testo di riferimento.

1 Preliminari e nozioni di base

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 1.1 – 1.3, 2.1 – 2.8 del testo. I contenuti del paragrafo 1.4, saranno fatti nel corso di Geometria e Algebra lineare, ma potranno essere utilizzati in questo corso. Gli studenti sono tenuti a studiare anche le Appendici 1.A e 2.A che fanno parte dei prerequisiti

1.1 Lez. 1-2. Lunedí 16/09

Spiegazioni sullo svolgimento del corso. Numeri naturali, interi, razionali, reali, notazioni insiemistiche, quantificatori e implicazioni

$$x \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Operazioni e loro proprietà. Proprieta' di ordine ($<, \leq$). Proprietà di densità. Proprietà di Archimede. Allineamenti decimali e la retta reale.
Valore assoluto (o modulo) e distanza. Disuguaglianza triangolare. Intervalli (limitati, illimitati, aperti, chiusi, semiaperti) e loro estremi.
Esercizio: scrivere $|x-4|$ e $|x+7|$ mediante la definizione di valore assoluto.

1.2 Lez. 3-4. Giovedí 19/09

Lunghezza o misura di un intervallo limitato e sua rappresentazione in termini di distanza. Centro (punto medio) e raggio degli intervalli limitati.
Esercizi: 1) dato un intervallo limitato, trovare la relazione fra gli estremi, il centro e raggio;
2) risolvere graficamente, con la nozione di distanza e valore assoluto, le seguenti disequazioni: $|x+4| < |x-3|$, $\quad x^2 - 4 < 0$, $\quad x^2 \geq 8$, $\quad x^2 \geq -5$, $\quad x^2 \leq -5$.
Insiemi finiti e infiniti. Insiemi limitati (superiormente limitati, inferiormente limitati), maggioranti (minoranti) massimo (minimo), estremo superiore (inferiore) di un insieme. Esempi. Proprieta' di completezza (o continuità) dei numeri reali.

1.3 Lez. 5 - 7. Venerdí 20/09

Cenni sulle conseguenze della proprietà di completezza: esistenza delle radici, potenze a base reale, logaritmi. **Riguardare le proprietà di radici, potenze e logaritmi**.
Elementi di logica: implicazioni, ipotesi, tesi, condizioni necessarie e condizioni sufficienti. Dimostrazione per assurdo della seguente proposizione: $\sqrt{2}$ *non è razionale*, e *quindi l'insieme* $\mathbb{Q}$ *non è completo*.
Definizione di funzione (o applicazione) da un insieme A ad un insieme B, dominio, codominio, immagine, grafico. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche, funzione inversa, funzione identità. Insiemi numerabili.
Funzioni reali di una variabile reale: notazioni, dominio, immagine, grafico, equazione del grafico. **Convenzione sul dominio** (dominio naturale, campo di esistenza). Funzioni invertibili e funzione inversa. Esempi.
Esercizi. 1) Determinare estremi superiore, inferiore, max, min, degli intervalli.
2) Determinare sup, inf e, se esistono, max, min dei seguenti insiemi: $\{1/(n+3) \colon n \in \mathbb{N}\}$, $\{1/n \colon n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, $\{x \in \mathbb{R} \colon 4 \le x^2 \le 9\}$.
3) Significato delle seguenti proposizioni: $M \neq \sup A$, A è illimitato
4) Dimostrazione delle seguenti proposizioni: $0 = \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$, $1/1000 \neq \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$, $-1 \neq \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$
5) Riscrivere le seguenti proposizioni mediante ipotesi e tesi e come condizioni necessarie e sufficienti, quindi dimostrarle: $M = \max A \Rightarrow M = \sup A$, $M = \max A \Leftrightarrow M = \sup A$ e $M \in A$, $\sup A \in A \Leftrightarrow \sup A = \max A$, $\exists \max A \Leftrightarrow \sup A \in A$
6) Enunciare e dimostrare proposizioni analoghe alle precedenti per l'estremo inferiore e il minimo.
7) Fare gli esercizi del testo e delle sezioni 1,2,3 sulle nozioni di base proposti sulla pagina web.

1.4 Lez. 8 - 9. Lunedì 23/09

Esempi di grafici di funzioni elementari: funzioni costanti, funzione identità, valore assoluto, potenze intere, radici. Funzioni definite a tratti.
Proprietà del grafico di una funzione reale di variabile reale, funzioni invertibili: relazione fra i grafici di una funzione e la sua inversa. Esempi.
Funzioni superiormente (inferiormente) limitate, estremo superiore (inferiore), massimo (minimo), punto di massimo (minimo).
Esempi fra cui: determinare il rettangolo di area massima fra quelli con perimetro assegnato.
Restrizione di una funzione. Estremo superiore (inferiore), massimo (minimo) di una funzione su (o in) un sottoinsieme del dominio.

1.5 Lez. 10 - 11. Giovedì 26/09

La funzione segno $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ e sua relazione con $x \mapsto x/|x|$ $(|x|/x)$. Misura dell'angolo in radianti e le funzioni trigonometriche. Funzioni pari, dispari, periodiche. Funzioni crescenti, decrescenti, monotone. Parte positiva, parte negativa e loro rapporto con la funzione e il suo valore assoluto.
Funzioni composte e loro proprietà, **esempio:** $\sqrt{x^2}$, $(\sqrt{x})^2$. Composizione di una funzione e la sua inversa. Inversa della funzione radice. Esercizi.

1.6 Lez. 12 - 14. Venerdì 27/09

Le funzioni trigonometriche inverse. Grafici delle funzioni potenza ad esponente reale. Grafici delle funzioni esponenziali e logaritmiche con base $a > 1$.
Metodi per disegnare il grafico di funzioni a partire da quello di funzioni note, cambiamento

di scala: $af(x)$, $f(ax)$, traslazioni orizzontali e verticali: $f(x \pm a)$, $f(x) \pm a$, simmetrie e valore assoluto: $-f(x)$, $f(-x)$, $f(|x|)$, $|f(x)|$).

Esercizi svolti o proposti.

1. Quale dei seguenti insiemi rappresenta il grafico di una funzione reale di variabile reale? $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$.

2. Scrivere in forma esplicita la funzione il cui grafico è dato da $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - x = 4,\ y \geq 0\}$ e determinarne dominio, immagine, iniettività.

3. Definire a tratti le funzioni $f(x) = |x - 3|$, $|1/(x - 3)|$, $|2x/(x^2 - 1)|$

4. Determinare dominio, immagine, grafico, eventuale funzione inversa e proprietà delle fuzioni definite da $f(x) = 1/x$, $1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x^2 - 2x$ su $(0, 2)$

5. Usando la definizione provare che la funzione definita da $f(x) = x^3 - x$ non è iniettiva.

6. Usando la definizione provare che la funzione definita da $y = 3x + 2$ è invertibile e determinarne l'inversa.

7. Della funzione definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 1/x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$, determinare dominio, immagine, grafico.

8. Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni e interpretarle in termini di grafici: $\sqrt{x - 1} < x - 3$, $\frac{2}{x} + 3 < \frac{4}{x} - 1$, $\frac{3}{x^2} + 1 \leq x^2 - 1$, $\sqrt{x - 1} < \sqrt{x}$, $\sqrt{x^2 + 2x - 1} > 3 - x$, $|x^2 - 4x - 5| > -x$, $\sqrt{-x} < 5 + x$.

9. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:
   1) $x \geq 5$ implica $x^2 > 30$; 2) $x = 0$ se e solo se $x^2 = 0$; 3) $x^3 \geq 8$ implica $x \geq 2$; 4) $x \geq 5$ è equivalente a $x^2 = 25$; 5) $x > 5$ implica $x^2 > 25$; 6) $x^2 > 25$ implica $x > 5$.

10. Determinare, usando la definizione, immagine, iniettività, suriettività della funzione definita da $f(x) = x^2 + 2x + 5$. Determinare inoltre estremo superiore, inferiore ed eventuali massimo, minimo, punti di massimo, punti di minimo.

11. Date f e g funzioni reali di variabile reale, osservare che:
    (a) $g = f^{-1} \implies g \circ f = I_{D_f}$, $f \circ g = I_{D_g}$, $g^{-1} = f$.
    (b) f, g iniettive (suriettive) $\implies g \circ f$ iniettiva (suriettiva)
    (c) $g \circ f$ iniettiva e $D_f = D_{g \circ f} \implies f$ iniettiva
    (d) $g \circ f$ suriettiva $\implies g$ suriettiva

    esprimere le precedenti implicazioni in termini di ipotesi e tesi e di condizioni necessarie e sufficienti.

12. Al variare del parametro reale a, si determini il dominio e si disegni il grafico della funzioni $f \colon x \mapsto (x - 1)^a \sqrt{x - 1}\, dt$ e $f \colon x \mapsto (x - 1)^a \sqrt[3]{x - 1}\, dt$.

13. Fare gli esercizi del testo e della sezione 4 sulle nozioni di base proposti sulla pagina web.

14. Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = \begin{cases} (x - 3)^2 - 2(x - 3) + 2 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 7/(x + 3) & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$, e determinarne estremo superiore e inferiore. La funzione ha massimo o minimo?

15. Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = ||x^2 - 4x| - 2|$, e determinarne estremo superiore e inferiore. La funzione ha massimo o minimo?

16. Dimostrare che

    (a) La funzione f definita da $f(x) = 1/x$ non è monotona ma lo è su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$, cioè lo sono le sue restrizioni a $(-\infty, 0)$ e a $(0, +\infty)$

    (b) Una funzione strettamente crescente è iniettiva, scrivendo esplicitamente ipotesi (Hp), tesi (Ts) e dimostrazione.

    (c) Una funzione strettamente crescente (decrescente) è crescente (decrescente), ma il viceversa non vale.

    (d) f è monotona se e solo se il prodotto $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1))$ non cambia mai segno, per ogni x_1 e x_2 nel dominio. Come posso esprimere in termini analoghi che è strettamente crescente (decrescente)?

    (e) Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ è strettamente monotona, allora è anche iniettiva e quindi invertibile.

    (f) La funzione $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1), \\ 3 - x & x \in [1, 2] \end{cases}$, è iniettiva ma non è monotona in [0,2].

    (g) Date f e g funzioni reali di variabile reale allora: f, g monotone (strettamente) $\implies$ $g \circ f$ monotona (strettamente), più precisamente: f, g crescenti o decrescenti $\implies$ $g \circ f$ crescente, e ... completare i casi.

2 Limiti e continuità

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 3.1 – 3.6, 5.1 – 5.5, 6.1 – 6.5 del testo. Non tutti gli argomenti del testo verranno affrontati, lo studente prenda il registro delle lezioni come indice. Alcuni degli argomenti dei precedenti paragrafi verranno affrontati in seguito e l'ordine seguito potrà differire da quello del testo.

2.1 Lez. 15-16. Lunedì 30/09

L'insieme $\mathbb{R}^*$ dei reali estesi, intorni, punti interni esterni e di frontiera, insiemi aperti e chiusi, punti di accumulazione. Definizione di *definitivamente per* $x \to \alpha$. Definizione, mediante il concetto di intorno e usando le disuguaglianze, di: $\lim_{x\to r} f(x) = \ell,\ r, \ell \in \mathbb{R}$. Limiti destri e sinistri, per eccesso e per difetto. Relazione fra limite, limite destro, limite sinistro. Esempi ed esercizi. Esempi: limiti di funzioni costanti, limiti delle funzioni identità, valore assoluto, segno.

2.2 Lez. 17-18. Giovedí 3/10

Definizione di $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, usando gli intorni. Alcuni esempi usando le disuguaglianze, completare le definizioni per esercizio. **Esercizio:** determinare graficamente i limiti di $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \le 0 \\ \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

Funzioni infinitesime, infinite e il simbolo $o(1)$ per $x \to \alpha$. Esempi di verifica di limiti.

2.3 Lez. 19-21. Venerdí 4/10

Infiniti e infinitesimi di riferimento per $x \to \alpha$. Proprietà dei limiti: unicità, "localizzazione", limite della restrizione e non esistenza di limiti, permanenza del segno, teoremi del confronto. Limite di una funzione limitata per una funzione infinitesima e $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$.
Limiti delle funzioni (definitivamente) monotone. Il numero $e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ (senza dimostrazione, paragrafo 4.2). Primi esempi di algebra dei limiti.

2.4 Lez. 22 - 23. Lunedí 7/10

Algebra dei limiti e forme indeterminate ($a \in \mathbb{R}$):

$$\pm\infty + a = \pm\infty\,, \quad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$
$$a\,(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & a > 0 \\ \mp\infty & a < 0, \end{cases}\,, \quad (\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty\,, \quad (+\infty)(-\infty) = -\infty$$
$$\frac{a}{\pm\infty} = 0\,, \quad 1/0^{\pm} = \pm\infty\,, \quad 1/(\pm\infty) = 0^{\pm}\,.$$

Non sono invece definite le seguenti espressioni, dette *forme indeterminate*:
$(+\infty) + (-\infty)\,, \quad 0/0\,, \quad 0\,(\pm\infty)\,, \quad (\pm\infty)/(\pm\infty)$.
Limiti dei polinomi e delle funzioni razionali.

Equivalenza asintotica: defininizione di $f(x) \sim g(x)$ per $x \to \alpha$ (paragrafo 5.3, pg. 154 del testo). Calcolo dei limiti mediante funzioni asintotiche. Esempi ed esercizi.

Esercizi svolti o proposti

1. Fare gli esercizi del testo sugli argomenti svolti.

2. Data $f : n \in \mathbb{N} \mapsto 1/n \in \mathbb{R}$, verificare che l'unico limite che si può fare è $\lim_{n\to+\infty} f(n)$ e provare, usando la definizione, che tale limite è 0.

3. Usando la definizione provare i seguenti limiti ($x_0 \in \mathbb{R}$)
$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} 1/(x-x_0) = \pm\infty\,, \quad \lim_{x\to x_0^{\pm}} 1/(x-x_0)^2 = +\infty\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty} 1/(x-x_0) = 0^{\pm}.$$
Stabilire inoltre per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste il limite per $x \to x_0$ di $1/(x-x_0)^n$.

4. Usando la definizione provare che $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1/(x-x_0)^n = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > 0$. Determinare inoltre, al variare di $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, quali dei precedenti limiti sono per difetto o per eccesso.

5. Sia $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ e $f : x \in A \mapsto x^2$, verificare che l'unico limite di f che posso fare è quello per $x \to 0$, verificare inoltre, usando la definizione, che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Osservare che il limite coincide col limite destro e che non si può fare il limite sinistro.

6. Calcolare, al variare di $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0}(\sin(x))^2/x^m$ e dedurne a quale infinitesimo di riferimento è equivalente $(\sin(x))^2$ per $x \to 0$.

7. Calcolare, al variare di $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^m}$ e dedurne a quale infinitesimo di riferimento è equivalente $1 - \cos(x)$ per $x \to 0$.

8. Calcolare il limite $\sin(x)/x$ per $x \to \pm\infty$.

2.5 Lez. 24 - 25. Giovedí 10/10

Continuità: definizione e relazione col limite, continuità a destra e sinistra, discontinuità eliminibili e di salto, estensione per continuità. Continuità su un insieme e la notazione $f \in C^0(A)$. Continuità delle funzioni elementari. Continuità di somma prodotto, quoziente e della composizione. Asintoti verticali, orizzontali e obliqui. Esempi. Esercizi su funzioni definite a tratti.

2.6 Lez. 26 - 28. Venerdí 11/10

Relazione fra limite e composizione di funzioni continue definite su unioni di intervalli:

1. *Cambiamento di variabile per funzioni continue.* Siano f e g due funzioni continue definite su intervalli. Se $f(x) \to \beta$ per $x \to \alpha$ e $g(x) \to \gamma$ per $x \to \beta$, allora, quando α è un punto di accumulazione per $g \circ f$, si ha $\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = \lim_{y\to\beta} g(y) = \gamma$.

2. *Passaggio al limite per funzioni continue.* Siano f e g due funzioni reali di variabile reale. Se $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ per $x \to \alpha$ e g è continua in l, allora, quando α è un punto di accumulazione per $g \circ f$, si ha $\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to\alpha} f(x)\right) = g(l)$.

Teorema degli zeri e sua formulazione equivalente, con dimostrazione. Il teorema del valore intermedio con dimostrazione della sua equivalenza al teorema degli zeri. Sua applicazione alla determinazione dell'immagine delle funzioni continue su intervalli. Applicazione del teorema degli zeri all'esistenza di soluzioni di equazioni e al calcolo della soluzione approssimata.

2.7 Lez. 29 - 30. Lunedí 14/10

Esercizio: dimostrazione che l'immagine di una funzione continua definita su un intervallo è un intervallo. Piú precisamente: se I è un intervallo e $f \in C^0(I)$, allora $f(I)$ è uno dei seguenti intervalli:

$$[\min, \max], \ (\inf, \sup), \ [\min, \sup), \ (\inf, \max]$$

Applicazione del teorema degli zeri alla determinazione del segno delle funzioni continue. Esempi: uso dei confronti asintotici e del teorema degli zeri per determinare limiti, segno, immagine (e grafico) di $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ e di $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)(x-3)}$; esistenza di radici reali di polinomi di grado dispari.
Funzioni continue su intervalli compatti, esistenza di massimi e minimi (senza dimostrazione). Esempi e controesempi.
Continuità della funzione inversa (senza dimostrazione): esempi grafici, ln, exp.
Cambiamento di base nelle funzioni esponenziali e logaritmiche. Le funzioni del tipo $x \mapsto f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ln(f(x))) = e^{g(x)\ln(f(x))}$, in particolare la funzione $x \mapsto x^x$.
Esercizi: $\lim_{x\to 0} \ln(\sin(x)/x) = \ln\left(\lim_{x\to 0} \sin(x)/x\right)$, limiti di $x \mapsto x^x$.

2.8 Esercitazioni 1 - 2. Martedí 15/10

Esercizi su limiti e continuità.

2.9 Lez. 31-32. Giovedí 17/10

Limiti notevoli (senza dimostrazione): $\forall \alpha > 0$, si ha
$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$.
Confronti fra infiniti e infinitesimi e simboli di Landau: definizione di $f(x) = o(g(x))$ per $x \to \alpha$. Interpretazione dei limiti notevoli mediante i simboli di Landau. Esempi

2.10 Lez. 33-35. Venerdí 18/10

Ordine di infinitesimo e di infinito e parte principale: defininizione ed esempi. Funzioni infinitesime e infinite che non ammettono ordine. Esempi sull'algebra degli *o piccolo*. Esercizi sulla continuità e sui confronti asintotici.

Esercizi svolti o proposti.

1. Fare gli esercizi su limiti e continuità della mia pagina web e quelli del testo sulla continuità.

2. Fare i test sulla continuità della mia pagina web

3. Verificare che la funzione di Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ è discontinua in ogni punto di $\mathbb{R}$.

4. Continuità delle funzioni definite a tratti: grafico e continuità al variare di $k \in \mathbb{R}$ delle funzioni
$$x \mapsto \begin{cases} \arctan(x+1) + k & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) + k & \text{se } x > 0 \\ x^2 + k & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

5. Usando le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento, determinare il segno e l'esistenza di asintoti delle funzioni $\frac{x^3-2x-1}{x+5}$ e $\frac{x^3-2x+1}{x+5}$

6. Grafico (molto approssimato) ed esistenza di asintoti di $\sin(x)/x$

7. Disegnare i grafici delle funzioni $x \mapsto \ln(|x|)$, $x \mapsto |\tan(x)|$, e determinare l'esistenza di asintoti.

8. Determinare graficamente gli intervalli in cui la soluzione dell'equazione $\ln(|x|) = \tan(x)$ è unica, applicare ad uno di essi il metodo di bisezione e determinare quanti passi occorrono per avere la soluzione a meno di $1/100$.

9. La funzione $x \mapsto \frac{x^2-1}{x+1}$, è estendibile per continuità a $x_0 = -1$, con quale valore?

10. La funzione $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ è estendibile per continuità a $x_0 = 0$, con quale valore?

11. Perché la funzione $f(x) = 1/x$, sebbene sia continua, non ha per immagine un intervallo?

12. Provare che se una funzione è continua sull'unione di due (tre, quattro, un numero finito) di intervalli limitati e chiusi, allora ammette massimo e minimo.

13. Usando la continuità, disegnare un grafico qualitativo della funzione $x \mapsto \sin(1/x)$. *Suggerimento.* Si calcoli l'immagine, i punti di massimo e minimo, gli zeri e si osservi che la funzione è dispari, che è positiva per $x > 1/\pi$ (perchè?) e che è decrescente su $[2/\pi, +\infty)$.

14. Considerare la funzione definita da $f(x) := x + e^x$ e verificare, usando la teoria svolta, che è continua. Giustificare inoltre le seguenti affermazioni

    (a) La funzione è strettamente crescente.

    (b) L'equazione $x + e^x = 3$ ammette una soluzione unica.

    (c) L'immagine della funzione è tutto $\mathbb{R}$.

(d) La funzione ha inversa continua con dominio e immagine uguali a $\mathbb{R}$

15. Determinare dominio, segno ed eventuali asintoti di: $f(x) = \ln(x^3 - 4x^2 + 2x + 1)$.

16. Calcolare zeri, min e max (se esistono) di: $f(x) = |x^3 - 3x^2 - 2x - 6|$.

17. Calcolare per quali valori di k è continua la funzione $f(x) = \begin{cases} \cos(x-k) & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$.

18. Stabilire quali delle funzioni definite da:

    $$f(x) = x - \cos(x),\ 1 - \cos(x),\ \ x/(1+x),\ |x|e^x,\ e^x,\ \cos(x) - e^x,\ x^2 - \ln(\cos(x))$$

    sono del tipo $o(1)$ per $x \to 0$.

19. Stabilire quali delle funzioni definite da:

    $$f(x) = x^2,\ x - \cos(x),\ x^3\cos(x),\ x\sin(x) + x^2,\ x/(1+x),\ |x|e^x,\ x^2e^x,\ |x|xe^x$$

    sono del tipo $o(x)$ per $x \to 0$.

20. Calcolare a quale infinitesimo di riferimento è equivalente $\sin(\frac{x^2}{x^3+3})$ per $x \to +\infty$

21. Trovare l'infinitesimo di riferimento equivalente a $1 - \cos(\frac{x^2+2x}{3x^3+x^2+1})$, per $x \to +\infty$

22. Provare il seguente risultato: se f è continua e $f(x) = o(1)$ per $x \to \alpha$ allora:
    1. $\sin(f(x)) \sim f(x)$ per $x \to \alpha$
    2. $1 - \cos(f(x)) \sim \frac{(f(x))^2}{2}$ per $x \to \alpha$.

    Suggerimento: operare il cambiamento di variabile $t = f(x)$.

23. Sapendo che f è una funzione con dominio $[-1, 1]$ e immagine $[3, 4]$, quale delle seguenti proposizioni posso affermare?

    (a) f è continua
    (b) f non è continua
    (c) f ha massimo
    (d) f ha minimo

24. Sapendo che f è una funzione con dominio $[-1, 1]$ e immagine $(3, 4]$, quale delle seguenti proposizioni posso affermare?

    (a) f è continua
    (b) f non è continua
    (c) f ha massimo
    (d) f ha minimo

25. Sapendo che f è una funzione con dominio $(-1, 1]$ e immagine $[3, 4]$, quale delle seguenti proposizioni posso affermare?

    (a) f è continua
    (b) f non è continua
    (c) f ha massimo
    (d) f ha minimo

26. Sapendo che f è una funzione con dominio $(-1, 1]$ e immagine $[-3, 4] \cup (5, +\infty)$, quale delle seguenti proposizioni posso affermare?
    (a) f è continua
    (b) f non è continua
    (c) f ha massimo
    (d) f ha minimo

27. Quali delle seguenti affermazioni è corretta per una funzione f definita su un intervallo I?
    (a) $f \in C^0(I)$ è una condizione sufficiente affinché $f(I)$ sia un intervallo
    (b) $f \in C^0(I)$ è una condizione necessaria affinché $f(I)$ sia un intervallo
    (c) $f \in C^0(I)$ e I limitato è una condizione sufficiente affinché $f(I)$ sia un intervallo limitato
    (d) $f \in C^0(I)$ e I limitato è una condizione necessaria affinché $f(I)$ sia un intervallo limitato
    (e) $f \in C^0(I)$ e I limitato e chiuso è una condizione sufficiente affinché $f(I)$ sia un intervallo limitato
    (f) $f \in C^0(I)$ e I limitato e chiuso è una condizione sufficiente affinché f ammetta massimo
    (g) $f \in C^0(I)$ e I limitato e chiuso è una condizione necessaria affinché f ammetta massimo

3 Calcolo differenziale per funzioni definite su unioni di intervalli

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 7.1 - 7.13 e 8.5 del testo.

3.1 Lez. 36-37. Lunedí 21/10

Definizione e notazione di derivata in un punto x_0 del dominio e in un insieme. Funzioni derivabili in un punto come funzioni approssimabili con funzioni lineari. Rapporto incrementale e suo significato geometrico, retta tangente. Derivabilità e continuità. Derivata destra e sinistra, punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale. Esempi: polinomi di primo grado, $x \mapsto |x|$, $\sqrt{(|x|)}$, $\sqrt[3]{x}$, derivata del monomio x^n.
Funzione derivata, l'insieme $C^1(A)$ delle funzioni con derivata continua su A. Gli insiemi $C^n(A)$, $n \in \mathbb{N}$, e $C^\infty(A)$.

3.2 Lez. 38-39. Giovedí 24/10

Proprietà delle derivate: somma, prodotto, differenza, quoziente, lo spazio vettoriale $C^1(A)$ e linearità della derivata. Derivata della composizione o regola della catena. Derivata della funzione inversa: enunciato del teorema e interpretazione geometrica.
Derivata delle funzioni elementari: $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, sin, cos, exp, ln (senza dimostrazione).
Esercizi: derivata di sinh, cosh, tan, arcsin.
Teorema sull'uguaglianza del limite della funzione derivata con il limite del rapporto incrementale (senza dimostrazione), vedi Teorema 7.23 del testo. Esempi: $\exp(-1/x^2)$, $x^2 \sin(1/x)$, $\sqrt{|x|}$, $\sqrt[3]{x}$.
Attenzione: *il testo, se il limite del rapporto incrementale in x_0 è $+\infty$ $(-\infty)$, scrive $f'(x_0) = +\infty$ $(-\infty)$, pur affermando ovviamente che f non è derivabile in x_0. Noi non faremo mai uso di questa notazione per non ingenerare confusioni. Piú precisamente, se il limite del rapporto incrementale in x_0 è $+\infty$ $(-\infty)$, diremo che f' non esiste in x_0.*

3.3 Lez. 40 - 42. Venerdí 25/10

Limite del rapporto incrementale e sua relazione col segno dell'incremento. Teorema di Fermat (con dimostrazione). Punti critici (o stazionari). Esistenza e calcolo degli estremi locali e globali di funzioni definite sugli intervalli limitati e chiusi.
Teoremi di Rolle e Lagrange (con dimostrazione). Monotonia e derivata (con dimostrazione). Esercizi.

Esercizi

1. Calcolo della derivata di $2^x,\ g(x)^{f(x)}$
2. Calcolo delle derivate e delle rette tangenti ai grafici delle funzioni arccos, arctan e $x \mapsto x^x$, estesa per continuità a zero.
3. Determinare il dominio della funzione definita da $f(x) = (\cos(x))^x$. Determinare la retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0, f(0))$
4. Usando il teorema della funzione inversa dimostrare che
$$D(e^x) = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow D(\ln(x)) = \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^+$$
5. Derivata delle funzioni definite a tratti: calcolare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni appartengono a $C^1(\mathbb{R})$
$$x \mapsto \begin{cases} a + x\ln(x) & x > 0 \\ b\cos(3x^5) & x \le 0 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} a + x\ln(x) & x \ge 1 \\ b\cos(3x^5) & x < 1 \end{cases}$$
6. Dimostrare che la seguente proposizione è equivalente al Teorema di Fermat. *Se x_0 è interno al dominio di f e $f'(x_0)$ esiste ed è diversa da zero, allora x_0 non è un punto di massimo o minimo locale per f.*
7. Provare il seguente risultato, conseguenza del Teorema di Fermat. *I punti "candidati ad essere" estremanti (cioè punti di massimo o di minimo) per una funzione f definita su un intervallo J vanno cercati tra le seguenti tre categorie*
   - punti di J non interni (cioè gli estremi di J, se gli appartengono);
   - punti di J in cui la funzione non è derivabile;
   - punti interni a J in cui si annulla la derivata.

   Si noti che i precedenti punti sono quelli che rimangono dopo aver scartato i punti interni a J con derivata non nulla. Si noti anche che nessuna delle tre condizioni precedenti ci assicura che un punto sia estremante. Tuttavia, se lo è, almeno una delle tre deve necessariamente essere soddisfatta. Come caso particolare si ha che, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, il teorema di Weierstrass ci assicura che ha massimo e minimo. Per calcolarli, posso usare il teorema di Fermat per determinare i candidati estremanti, cioè i punti di massimo e minimo sono da ricercare fra i punti del seguente insieme
$$X = \{a, b\} \cup \{x \in (a, b) : \nexists f'(x)\} \cup \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$$
   Se X contiene un numero finito di punti, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, il massimo e il minimo di f saranno, rispettivamente, il più grande e il più piccolo fra i valori di:
$$f(X) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}.$$

8. Data la funzione definita da $f(x) = 2x - x^3$, determinare la retta tangente al grafico di f nei punti corrispondenti a $x_0 = 0, -1, 1$.

9. Studiare le seguenti funzioni in base alla teoria fin qui svolta
$$x \mapsto \ \sin(1/x), \quad x\sin(1/x), \quad x^2\sin(1/x),$$

10. Determinare dominio e funzione derivata di $x \mapsto \ (1-x^2)^{\sin(x)}$,

11. La funzione abs ha due punti di massimo e uno di minimo nell'intervallo $[-1, 1]$. Quali sono i suoi punti di massimo e minimo sull'intervallo $[-1, 3]$?

12. Determinare massimo e minimo della funzione $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ su J con $J = [-4, 4],\ [0, 7],\ [-4, -2],\ [2, 5]$. È particolarmente istruttivo risolvere il problema sia con il teorema di Fermat che disegnando il grafico.

13. Disegnare il grafico e determinare graficamente massimo e minimo della funzione $x \mapsto ||x^3+1|-3|$ su J con $J = [-2, 2],\ [0, 7],\ [-1/2, 2]$. Riconoscere a quali delle categorie descritte nell'esercizio 7. appartengono i punti di massimo e minimo. Risolvere il problema usando il teorema di Fermat (prescindendo dal grafico disegnato), usando il teorema di derivazione per le funzioni composte e stabilendo quali siano i punti singolari mediante la definizione di derivata.

14. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ massimo e minimo (se esistono) della funzione $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x\,, & x \le 0 \\ 1/(x+3) + k\,, & x > 0 \end{cases}$. Ci sono ulteriori massimi e minimi relativi?

15. Fra i triangoli isosceli di lato 20 cm, determinare (se esiste) quello di area massima. Ne esiste uno di area minima?

16. Fra i triangoli isosceli di perimetro 20 cm, determinare (se esiste) quello di area massima. Ne esiste uno di area minima?

17. Rispondere ai seguenti quesiti, giustificando le risposte, sulla funzione definita da $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{3x^2 - 9}}$
    a. Determinare il dominio.
    b. La funzione è pari, dispari, periodica?
    c. Determinare i punti in cui la funzione è continua.
    d. Spiegare perché, dopo aver risposto ai precedenti quesiti, posso affermare che f ammette massimo e minimo.
    e. Determinare i punti in cui f è derivabile e gli eventuali punti singolari (dove è continua ma non derivabile).
    f. Determinare, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico nei punti di ascissa $x = -5, \sqrt{3}, 2$.
    g. Spiegare, da un punto di vista teorico, come si possono trovare il massimo e il minimo della funzione e calcolarli. Determinare i punti di massimo e di minimo della funzione.

18. Spiegare perché possiamo affermare che esiste un rettangolo di area massima inscritto in un cerchio di raggio 3. Calcolare tale area.

3.4 Lez. 43 - 44. Lunedí 28/10

Risultato con dimostrazione: *Una funzione continua su* $[a, b]$ *con derivata nulla su* (a, b) *è costante*. Applicazione del risultato alla funzione $f = \arcsin + \arccos$ e alla funzione definita da $x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan(x)$.
Esercizi proposti: 1. Disegnare il grafico $y = \arctan\left((1 + x)/(1 - x)\right)$ a partire dal grafico $y = \arctan(x)$.
2. Verificare che la funzione $f = \arctan + \text{arcotan}$ è costante su $\mathbb{R}$ e determinare la costante.

Definizione di primitiva di una funzione su di un intervallo I, come primo esempio di equazione differenziale. Struttura dell'insieme delle primitive (par. 8.5). Esempi e applicazione alla caduta dei gravi.
Esercizi proposti: 1. **Leggere la tabella della derivazione delle funzioni elementari come calcolo di primitive**
2. Una funzione con discontinuità di salto non ammette primitive
3. Verificare che $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ (estesa per continuità a 0) è una primitiva su $\mathbb{R}$, di quale funzione? La funzione è continua?

3.5 Esercitazione 3-4. Mercoledí 30/10 ore 9-11 aula 120 di S.Marta

Esercizi su limiti e continuità.

3.6 Esercitazione 5. Giovedí 31/10

Correzione della prova intercorso.

3.7 Lez. 45. Giovedí 31/10

Funzioni convesse (concave): definizione geometrica e analitica, condizioni mediante derivate prime e seconde (senza dimostrazione).

3.8 Lez. 46 - 47. Lunedí 4/11

Teoremi di de L'Hôpital (senza dimostrazione): enunciato ed esempi (verifica di limiti notevoli, relazione fra funzione derivata e limite del rapporto incrementale).
Studio del grafico di una funzione.
Esercizi:

1. Dimostrare che se una funzione è derivabile e convessa su un intervallo I e $x_0 \in I$ è un punto stazionario per f allora x_0 è un punto di minimo per f.
2. Dimostrare che se una funzione è derivabile e concava su un intervallo I e $x_0 \in I$ è un punto stazionario per f allora x_0 è un punto di massimo per f.
3. Calcolare la funzione derivata di $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$, estesa per continuità a zero.
4. Studio della cubica
5. Per quali valori della coppia di parametri $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ le seguenti funzioni appartengono a $C^1(\mathbb{R})$?
$$f : x \mapsto \begin{cases} h + \cos(x) & x > 0 \\ k + x^5 & x \le 0 \end{cases} \qquad f : x \mapsto \begin{cases} h(x-1)^x & x > 1 \\ k\cos(3x^5) & x \le 1 \end{cases}$$
6. Disegnare il grafico di $x \mapsto e^{-x^2}$

7. Disegnare il grafico della funzione $x \mapsto he^{-(x-a)^2}$, al variare di $(h,a) \in \mathbb{R}^2$

8. Disegnare il grafico di $x \mapsto x^x$ e di $x \mapsto x^{-x}$

9. Determinare fra i rettangoli di area assegnata (perimetro assegnato) quello, se esiste, di perimetro (area) massimo e minimo.

10. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

    (a) $\ln(x)$ è una primitiva di $1/x$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
    (b) $\ln(-x)$ è una primitiva di $1/x$ su $(-\infty, 0)$
    (c) $\{x \mapsto \arctan(3x) + c\,,\ c \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme delle primitive di $3/(1+9x^2)$ su $\mathbb{R}$
    (d) $\{x \mapsto \cos(x) + c\,,\ c \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme delle primitive di $\sin(x)$ su $\mathbb{R}$
    (e) $\{x \mapsto \cosh(3x) + c\,,\ c \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme delle primitive di $\sinh(3x)$ su $\mathbb{R}$
    (f) $\{x \mapsto \ln(\cos(x)) + c\,,\ c \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme delle primitive di $-\sin(x)/\cos(x)$ su $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ , k \in \mathbb{Z}\}$
    (g) $\{x \mapsto \ln(\cos(x)) + c\,,\ c \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme delle primitive di $-\sin(x)/\cos(x)$ su $(0, \pi)$
    (h) $\{x \mapsto \ln(\cos(x)) + c\,,\ c \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme delle primitive di $-\sin(x)/\cos(x)$ su $(\pi, 2\pi)$
    (i) $\{x \mapsto \ln(\cos(x)) + c\,,\ c \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme delle primitive di $-\sin(x)/\cos(x)$ su $(\pi/2\,,\, 3\pi/2)$

4 Approssimazione di Taylor

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 7.11 - 7.13 del testo.

4.1 Lez. 48 - 49. Giovedí 07/13

Definizione di sommatoria. Polinomio di Taylor (MacLaurin): definizione, esempi e proprietà algebriche. Teorema di Peano (senza dimostrazione) e suo significato in termini di approssimazione. Riduzione dell'approssimazione di Taylor a quella MacLaurin. Calcolo dei polinomi di MacLaurin di funzioni, a partire da polinomi noti, col metodo della sostituzione. Applicazioni ed esercizi.

- Verificare che $T'_{n,f,x_0} = T_{n-1,f',x_0}$, cioè *il polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 di una funzione f è una primitiva del polinomio di Taylor di ordine $n-1$ centrato in x_0 della funzione f'.*

- Calcolo delle approssimazioni di MacLaurin con resto in forma di Peano delle funzioni $e^x,\ e^{-x},\ \sin(x),\ \cos(x),\ \sinh(x),\ \cosh(x)$

- Calcolo di $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x + x^3}{x^n}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$

- Calcolo dell'approssimazione di MacLaurin della funzione $\sin(x)/x$, estesa per continuità a zero e, conseguentemente di tutte le sue derivate nell'origine.

- Calcolo, a partire dall'approssimazione di MacLaurin di sin e cos, dell'approssimazione di Taylor di sin e cos centrata in un qualsiasi $x_0 \in \mathbb{R}$.

4.2 Lez. 50 - 52. Venerdí 08/13

Uso dell'approssimazione di Taylor per la determinazione degli estremi locali e della convessità e concavità locale. Calcolo dei polinomi di MacLaurin di funzioni, a partire da polinomi noti, col metodo della sostituzione e le proprietà algebriche. Calcolo dei polinomi di MacLaurin di $1/(1+x)$, $1/(1-x)$, $1/(1+x^2)$, $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$.
Coefficienti binomiali e calcolo del binomio di Newton mediante l'approssimazione di MacLaurin di $(1+x)^n$. Approssimazione di $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Elenco delle approssimazioni di MacLaurin da conoscere:

$$\exp(x),\ \sin(x),\ \cos(x),\ \sinh(x),\ \cosh(x),\ \ln(1+x),\ (1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Esercizi sull'approssimazione di Taylor con l'errore in forma di Peano

1. Calcolo delle derivate in $x_0 = 0$ delle funzioni $1/(1-x^2)$, $1/(1+x^2)$, $(1-\cos(x^5))/x^3$ mediante il loro polinomio di MacLaurin. In particolare calcolare le derivate di ordine 100 e 50.

2. Determinare il polinomio di MacLaurin di ordine 2 della funzione $\cos(\pi+x)$ e usarlo per determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = \pi^2$ di funzione $f(x) = \cos(\sqrt{x})$. Calcolare quindi, al variare di $n \in \mathbb{N}$, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to\pi^2} \frac{f(x)+1}{x^n}$.

3. Calcolare, se esistono i seguenti limiti: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)-\ln(1+x^2)}{x^4+x^7}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sin(x)+\frac{1}{2}x^2-1}{3x^3+8x^4}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}+1-2\cos(x)}{x+11x+3x^8}$.

4. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+\frac{x^2}{1+x}\right)$.

   Svolgimento.

   $$\sqrt{x^2+2x}+\frac{x^2}{1+x} = |x|\left(\sqrt{1+2/x}-(1+1/x)^{-1}\right) = |x|\left(1+1/x-1+1/x+o(1/x^2)\right).$$

   Quindi: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+\frac{x^2}{1+x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 2|x|/x = -2.$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(\sin(x^3)))}{x^6}$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{3(\sin(x))^2+\sin(4x^2)}$.

7. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x^2-5x+6)}{1-\cos(x-3)}$.

8. Fare tutti gli esempi ed esercizi del libro sull'argomento.

4.3 Lez. 53 - 54. Lunedí 11/11

Approssimazione di Taylor con resto in forma di Lagrange.
Uso dell'approssimazione di Taylor con resto in forma di Lagrange (in particolare del teorema di Lagrange) per stimare i valori delle funzioni. Esercizi.

4.4 Esercitazioni 6-7. Giovedí 14/11 ore 11:30-13 aula 119

Esercizi sul calcolo differenziale.

5 Integrale di Riemann

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 8.1 - 8.7 del testo.

5.1 Lez. 55 - 56. Giovedí 14/11

Il concetto di area di figure piane. Partizioni (suddivisioni) di un intervallo limitato, plurirettangoli iscritti e circoscritti, disuguglianze legate alle partizioni. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale di Riemann di una funzione limitata su un intervallo limitato. Relazione fra integrale e area: il caso di funzioni positive (negative) sull'intervallo. Esempi: funzioni costanti, funzione di Dirichlet, calcolo di integrali mediante aree.

5.2 Lez. 57 - 59. Venerdí 15/11

Risultato senza dimostrazione: l'integrale di una funzione integrabile secondo Riemann non cambia se si cambiano un **numero finito** di valori. Classi di funzioni integrabili sull'intervallo $[a, b]$ (senza dimostrazione): $C^0([a, b])$, funzioni monotone su $[a, b]$, funzioni limitate su $[a, b]$ e continue tranne un insieme finito di punti. Esempio: la funzione $\sin(1/x)$ sull'intervallo $[0, 1]$ estesa con qualunque valore a 0 (e quindi anche non estesa).
Proprietà dell'integrale (senza dimostrazione) e loro significato geometrico e algebrico:

- Linearità dell'integrale: l'insieme $\mathcal{R}(a, b)$ delle funzioni integrabili su $[a, b]$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione $f \in \mathcal{R}(a, b) \mapsto \int_{[a,b]} f \ \in \mathbb{R}$ è lineare.
- Additività rispetto all'intervallo.
- Monotonia
- Relazioni fra gli Integrali di $f,\ f^+,\ f^-,\ |f|$ (proprietà di continuità). Applicazione della proprietà allo studio della relazione fra integrale e area.

Integrale orientato: definizione e relazione fra integrale e area. **Esercizio:** Determinare quali delle proprietà dell'integrale di Riemann si estendono all'integrale orientato, in particolare si verifichi che se $f \in \mathcal{R}(I)$ e $a, b, c \in I$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Per $f \in \mathcal{R}(a, b)$ e $c \in [a, b]$ definizione e relazione fra le funzioni integrali

$$F_c : x \in [a, b] \mapsto \int_c^x f(t)\,dt$$

Esercizi

1. Date $f_1 : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ e $f_2 : x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \le 0 \\ \sqrt{r^2 - x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, calcolare: $\int_{[-r,r]} f_1(x)dx$ e $\int_{[-r,r]} f_2(x)dx$.

2. Data $f : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ -\sqrt{2x-x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, calcolare $\int_{[-2,2]} f(x)dx$ (risultato: $-\pi/2$). Inoltre determinare l'area della parte di piano delimitata dalla funzione, l'asse delle x e le rette $x = \pm 2$. Descrivere l'area della parte di piano delimitata dalla funzione, l'asse delle x e le rette $x = \pm 2$, usando solo somme di integrali orientati.

3. Calcolare $\int_{\pi}^{-\pi} \sin(x)dx$ (risultato: 0). Cosa posso dire dell'area della parte di piano compresa fra l'asse x, il grafico del seno e le rette verticali $x = \pm\pi$?

5.3 Lez. 60 - 61. Lunedí 18/11

Teorema della media integrale, con dimostrazione. Continuità delle funzioni integrali con dimostrazione. Il testo considera solo la continuità di funzioni integrali relative ad una funzione $f \in \mathcal{R}(a,b)$, noi estendiamo il risultato alle funzioni *localmente integrabili su un intervallo* I, dove I è un intervallo qualsiasi anche illimitato, cioè alle funzioni che soddisfano alla seguente proprietà su I: *Per ogni intervallo* $[a,b] \subset I$*, la funzione* f *appartiene a* $\mathcal{R}(a,b)$.
Enunciato e dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo per funzioni continue su un qualsiasi intervallo I.

Teorema. Sia I un intervallo, sia $f \in C^0(I)$ e sia $c \in I$. La funzione $F_c : I \to \mathbb{R}$ definita da $F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$ è una primitiva di f su I. Ne segue che $F_c \in C^1(I)$. Inoltre si ha che, se $d \in I$, allora $F_d = F_c + \int_d^c f(x)dx$

Significato ed esempi.
Esercizi

1. Siano f_1, f le funzioni definite nella precedente lezione, calcolare $\int_0^{-r} f_1(x)dx$, e $\int_r^x f(t)\,dt$, $\forall x \leq 0$. Inoltre verificare (se possibile) il teorema della media sui precedenti integrali, valutando il punto dell'intervallo in cui la funzione assume il valore della media integrale.

2. Verificare che se f è una funzione dispari e integrabile su $[-a,a]$ allora $\int_a^{-a} f(x)dx = 0$.

5.4 Lez. 62 - 63. Giovedí 21/11

Enunciato del teorema fondamentale del calcolo del testo, confronto fra i due enunciati. Esempio: applicazione dei due risultati alle funzioni considerate nelle precedenti lezioni. Formula fondamentale del calcolo integrale (Corollario 8.15 del testo). Calcolo di alcuni integrali immediati, calcolo di aree.

5.5 Lez. 64 - 66. Venerdí 22/11

Integrali impropri e integrabilità in senso improprio come limiti di funzioni integrali. Integrale improprio degli infinitesimi e infiniti di riferimento $\frac{1}{|x-x_0|^r}$ e loro interpretazione geometrica in termini di aree. Assoluta integrabilità in senso improprio e relazione fra integrabilità e assoluta integrabilità in senso improprio. Criteri di integrabilità in senso improprio per funzioni definitivamente positive (negative): criterio del confronto, dell'equivalenza asintotica e criterio del confronto per funzioni $f(x) = o(g(x))$.

Esercizi sulle funzioni integrali e su funzioni ottenute da composizioni con funzioni integrali.

Esercizi sulle funzioni integrali

1. Calcolare il dominio e disegnare il grafico delle funzioni definite da: $F : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$, $\quad G : x \mapsto \int_{-1}^x \frac{1}{t} dt$. Inoltre, usando la relazione fra integrale e area e la definizione di integrale orientato, provare che $G(x) = F(-x)$.
   Suggerimento: osservare che $t \mapsto 1/t$ è dispari e distinguere i casi $x < -1$ e $x \in (-1, 0)$.

2. Data la funzione $f : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, considerare la funzione $F : x \in [-r, r] \mapsto \int_0^x f(t)dt$. Usando il teorema fondamentale del calcolo disegnare il grafico di F e calcolarne il massimo e il minimo.
   Detta $A(s)$ l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x, l'asse y e la retta $x = s$, disegnare il grafico della funzione A e descrivere la relazione fra la funzione F e la funzione A. Studiare la classe di derivabilità sia di F che di A.

3. Data la funzione $f : x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{2x - x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, disegnare il grafico della funzione F definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$. Inoltre, usando la relazione fra integrale ed area calcolare $F(2)$ e $F(-2)$.

4. Disegnare il grafico della funzione integrale relativa all'origine della funzione parte intera. La funzione parte intera è definita da $x \mapsto n$ se $x \in [n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Fare, per quanto possibile, il grafico qualitativo della funzione $F : \; x \mapsto \int_1^x t \ln(t)dt$. In particolare mostrare che il suo dominio è $[0, +\infty)$, che ha un minimo globale in $x = 1$, che ha tangente orizzontale in $x = 0$ e che $\lim_{x\to+\infty} F(x)dx = +\infty$ (si usi la relazione fra integrale e area e le proprietà dei limiti).

6. Fare, per quanto possibile, il grafico qualitativo della funzione $G : \; x \mapsto \int_1^{1/x^2} \ln(t)dt$.
   Suggerimento. Detta $F(x) = \int_1^x \ln(t)\, dt$, si scriva G tramite F e se ne studi dominio e derivata mediante la composizione di funzioni. Usando il cambiamento di variabile $y = 1/x^2$, la relazione fra integrale e area e le proprietà dei limiti, si dimostri che $\lim_{x\to 0} G(x)dx = +\infty$. La funzione G ha un asintoto orizzontale, ma ancora non si hanno gli elementi per provarlo, si può comunque provare che la funzione ha limite per $x \to +\infty$, usando i risultati sulla crescenza (decrescenza) della composizione e le proprietà dei limiti.

7. Usando il teorema sulla derivazione della composizione di funzioni, si determini, ove possibile, la derivata della funzione $G : \; x \mapsto \int_0^{\frac{1}{|x|+1}} e^{t^2} dt$ e se ne tracci un grafico qualitativo. Si mostri anche, usando il Teorema della media integrale, che $\lim_{x\to+\infty} G(x)dx = 0$. Si può arrivare allo stesso risultato anche con un cambiamento di variabile (quale?)

8. Integrale improprio della funzione gaussiana $x \mapsto e^{-x^2}$ su $\mathbb{R}$.

9. Determinare l'esistenza dei seguenti integrali impropri con lo studio asintotico della funzione integranda

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \; \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\, dx, \; \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + 1)^2}\, dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\, dx, \; \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx, \; \int_0^1 \frac{x}{1 - x^3}\, dx,$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln(x)}{(1 - x)^2}\, dx, \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1}\, dx.$$

10. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ l'integrabilitá in senso improprio di

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|^\beta}{x^2}\,dx$$

5.6 Lez. 67 - 68. Lunedí 25/11

Integrale indefinito. *Contrariamente al testo, col simbolo $\int f(x)\,dx$, noi non indicheremo né una primitiva né l'insieme delle primitive, ma una funzione la cui derivata (su un qualche intervallo) è f*; in altre parole indefinito è l'intervallo su cui si considera la primitiva. Questo perché la primitiva è strettamente legata all'intervallo e l'utilità del simbolo risiede nel facilitare i calcoli, senza ogni volta precisare l'intervallo su cui consideriamo la primitiva. Così scriveremo $\int(1/x)dx = \ln(|x|)$, tenendo però ben presente che ci sono primitive distinte della funzione $1/x$ sulle due semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.
Integrali per parti: uso del differenziale come formula mnemonica. Esempi.
Integrali per sostituzione: uso del differenziale come formula mnemonica. Primi esempi.
Integrale indefinito delle funzioni razionali; descrizione completa di quelle con denominatore di grado uno o due, cenni sulle altre. Esercizi.

Esercizi di ricapitolazione

1. $\displaystyle\int_0^1 x^a \ln(x)\,dx\ , \quad a \in \mathbb{R}$

2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ stabilire il carattere dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a \ln(x)\,dx$

3. Calcolo dell'area di parte del cerchio mediante la funzione integrale

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-t^2}dt$$

4. Calcolare i seguenti integrali orientati usando l'integrazione per parti e per sostituzione per l'integrale di Riemann

$$\int_1^0 x(x-1)\sin(4\pi x)\,dx\,,\ \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx\,,\ \int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

5. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ si possono calcolare i seguenti integrali orientati e calcolarli

$$\int_a^b \ln(x)\,dx\,, \int_a^b \ln(|x|)\,dx\,,\ \int_a^b \arctan(x)\,dx\,,\ \int_a^b \frac{2x+1}{x^2-1}\,dx\,,\ \int_a^b \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

6. Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dal grafico della funzione $y = \arcsin(x)$ e la retta $y = \frac{\pi}{2}x$.

7. Calcolare $\int_a^b f(x)dx$, dove f è una delle seguenti funzioni e a, b sono coppie di numeri naturali scelte dallo studente (fra quelle possibili).

$$x \mapsto \frac{3x^3+x+1}{x+1}\,, \quad \frac{x}{hx^2+1}\,,\ h \in \mathbb{R}\,, \quad \frac{1}{hx^2+1}\,,\ h \in \mathbb{R}\,,$$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-1}\,, \quad \frac{x+1}{x^2+x+1}\,, \quad \frac{1}{x^2+x+1}\,, \quad \frac{x+3}{(x+1)^2}.$$

8. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ l'integrabilitá in senso improprio di
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}\, dx.$$

9. Studiare $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ e, di conseguenza, la funzione
$$x \mapsto \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^x e^{-\frac{(t-x_0)^2}{2\sigma^2}}\, dt,\ \ \sigma > 0,\ \ x_0 \in \mathbb{R},$$
calcolandone gli asintoti orizzontali, sapendo che $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e usando la sostituzione $y = \frac{t-x_0}{\sqrt{2\pi}}$. Fare i grafici e confrontarli.

10. Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = x\sin(x)$, $y = -x\cos(x)$ e contenuta nella striscia delimitata dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$.

11. Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = \arctan(x)$ ed $y = \frac{\pi}{4}x$.

12. Fare uno studio qualitativo di $G : \ x \mapsto \int_0^{\cos(x)} \arcsin(t)\, dt$: dominio, derivata, grafico (qualitativo).

13. Calcolare esplicitamente la $G(x)$ dell'esercizio precedente svolgendo l'integrale.

14. Data
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{x^3} & \text{se } x \le -2 \\ \arctan(x) & \text{se } x > -2 \end{cases},$$
studiare $F(x) = \int_{-7}^x f(t)\, dt$, facendo il grafico di f e poi quello di F; trovare anche gli asintoti di F, e descrivere $F(x)$ in termini di aree, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

15. Calcolare esplicitamente la $F(x)$ dell'esercizio precedente svolgendo l'integrale, in particolare calcolare $F(-2)$ e $F(1)$.

16. Data $f(x) = \frac{1+x^5}{\ln(x)}$, studiare $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x f(t)\, dt$.

17. Data $f : [0; 4] \mapsto \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 5 & \text{se } x = 1, x = 4 \\ \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} & \text{se } 1 < x < 4 \end{cases},$$
calcolare $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$; in particolare calcolare $F(4)$.

18. Studiare l'integrabilità in senso improprio di
$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} \frac{1}{|x-x_0|^r}\, dx\,,\ a > 0,\quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{|x-x_0|^r}\, dx\,,\ a > x_0,\quad \int_{-\infty}^a \frac{1}{|x-x_0|^r}\, dx\,,\ a < x_0$$
con la sostituzione $x - x_0 = h$.

19. Studiare la funzione $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{t^3+1}{t^2 \cdot \sqrt[3]{7-t}}\, dt$

5.7 Esercitazione 6-7. Mercoledí 27/11 ore 14-16 aula 1 (sottosuolo) di S.Marta

Esercizi sul calcolo differenziale e Taylor.

5.8 Esercitazione 8. Giovedí 28/11

Correzione della prova intercorso.

5.9 Lez. 69. Giovedí 28/11

Esercizi

5.10 Lez. 70 - 73. Venerdí 29/11

Area della parte di piano compresa fra i grafici di due funzioni. Esempi ed esercizi: area della parte limitata di piano delimitata dal grafico della funzione $y = \arcsin(x)$ e la retta $y = \pi x/2$, area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = x\sin(x),\ y = -x\cos(x)$ e contenuta nella striscia delimitata dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$. Alcune sostituzioni. Esempi: area della parte limitata di piano delimitata dal grafico della funzione $y = \sqrt{1-x^2}$ e la retta $y = x - 1$, $\int \sqrt{b^2 - a^2x^2}$ e applicazione al calcolo dell'area dell'ellisse, $\int \sqrt{b^2 + a^2x^2}$ e $\int \sqrt{a^2x^2 - b^2}$. Esercizi. Esercizio parzialmente svolto: studiare la funzione integrale
$F : x \mapsto \int_{-2}^{x} (1 + 1/t)^t dt$.

1. F è definita in $(-\infty, -1)$, quindi serve lo studio della funzione $f : x \mapsto (x + 1/x)^x$ sulla semiretta $(-\infty, -1)$. Gli studenti sono invitati a ripetere i calcoli sulla semiretta $(0, +\infty)$ e studiare la funzione integrale $x \mapsto \int_2^x (1 + 1/t)^t dt$.
2. Equivalenza asintotica per $x \to -\infty$.
$$f(x) = e^{x\ln(1+1/x)} = e^{1-1/(2x)+o(1/x)} = e(1 - 1/(2x) + o(1/x))$$
3. Equivalenza asintotica per $x \to -1^-$, posto $x = -1 - h,\ h > 0$.
$$f(x) = e^{x\ln(1+1/x)} = e^{(-1-h)(\ln(h)-\ln(1+h))} = e^{-\ln(h)+o(h)} = \frac{1}{h}(1 + o(h))$$
4. $f'(x) = f(x)(\ln(1 + 1/x) - 1/(1 + x))$. Posto $g(x) = \ln(1 + 1/x) - 1/(1 + x)$, si ha che $g(x) \sim 1/(x^2 + x),\ x \to -\infty$ e che $g'(x) = -1/(x(x + 1)^2)$. Ne segue che g è crescente e positiva su $(-\infty, -1)$ e quindi che f' è positiva e f crescente nello stesso intervallo.
5. Possiamo quindi affermare che F è crescente e convessa. Usando il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri, per le equivalenze asintotiche determinate nei punti 2,3, si può affermare che F non ha asintoto orizzontale ed ha asintoto verticale.
6. Si può anche studiare l'esistenza di asintoto obliquo, cioè se esistono $m, q \in \mathbb{R}$, tali che $F(x) = mx + q + o(1),\ x \to -\infty$, ragionando nel seguente modo.
   (a) È facile vedere che $m = e$.
   (b) Il calcolo di $\lim_{x\to-\infty} F(x) - ex$, equivale a studiare la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_{-2}^{-\infty} (f(t) - e)\, dt$. L'equivalenza asintotica studiata al punto 2 implica che non esiste asintoto obliquo.

6 Successioni e serie numeriche

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 4.7 - 4.9 e 9.1 del testo.

6.1 Lez. 74-75. Lunedí 2/12

Successioni convergenti, divergenti, irregolari. Limiti notevoli: $\frac{x^n}{n!}$, $\frac{n!}{n^n}$, senza dimostrazione. Serie numeriche: la successione delle somme parziali, definizione di serie convergenti, divergenti, irregolari, somma della serie. Carattere della serie geometrica. Esercizio: verificacare che $0,\bar{9} = 1$. Proprietà elementari delle serie. Condizione necessaria per la convergenza di una serie. Serie a termini positivi: serie armonica e armonica generalizzata, con dimostrazione usando la convergenza o divergenza dell'integrale improprio. Assoluta convergenza di una serie, relazione fra convergenza assoluta e convergenza.

6.2 Lez. 76 - 77. Giovedí 5/12

Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: criterio del confronto e del confronto asintotico, criterio del rapporto e della radice. Serie di McLaurin. Esempio: serie di McLaurin di e^x e verifica che $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Esercizi: 1. Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{i\geq 1} \sin(1/n^2)\sqrt{n+n^2}, \quad \sum_{i\geq 1} \sin(1/n^2)\sqrt{n+\sqrt{n}}$$

2. Studiare il carattere della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{n\geq 0} nx^n$.
Serie a segni alterni: criterio di Liebniz.

6.3 Lez. 78 - 80. Venerdí 6/12

Esercizi:

1. Dimostrazione, mediante l'approssimazione di McLaurin con l'errore in forma di Lagrange, che $\ln(2) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{n+1}$
2. Determinare l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ per cui le seguenti serie convergono
$$\sum_{n\geq 1} x^n/n, \quad \sum_{n\geq 1} x^n/n^2, \quad \sum_{n\geq 1} (2^x - 3)^n$$
3. Esercizi sulle funzioni integrali.

6.4 Lez. 80 - 81. Lunedí 9/12 - ore 14 - 15:45

Lezioni tenute dalla Prof. F. Bucci: esercizi.

7 Equazioni Differenziali Ordinarie

Gli argomenti di questa sezione sono nei paragrafi 17.1, 17.2 (17.2.2 parziale, 17.2.3 escluso), 17.3 del testo.

7.1 Lez. 82 - 83. Giovedí 12/12

Equazioni differenziali ordinarie (EDO) in forma normale: definizione di soluzione e soluzione massimale. EDO lineari del primo ordine e problema di Cauchy. Soluzioni delle EDO lineari del primo ordine a coefficienti continui.

7.2 Lez. 84 - 86 Venerdí 13/12

EDO lineari del secondo ordine e problema di Cauchy. Struttura delle soluzioni. EDO lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: soluzione generale delle omogenee. Esempio: moto armonico e moto armonico forzato, risonanza.
Equazioni del primo ordine a variabili separabili e problema di Cauchy. Esempi: $y' = y^2$, $y' = y(a-y)$, proprietà della soluzione al variare della condizione iniziale.
Esercizi.

1. Verificare che le funzioni definite da $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = -1/x^2$ sono soluzioni sulla semiretta $(0, +\infty)$ dell'equazione lineare omogenea $y'' + \dfrac{2}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y = 0$ e determinarne la soluzione generale. Determinare inoltre la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy: $\begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

2. Verificare che le funzioni definite da $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x^2 \ln(x)$ sono soluzioni sulla semiretta $(0, +\infty)$ dell'equazione lineare omogenea
$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0 \tag{1}$$
e determinarne la soluzione generale. Determinare inoltre la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy: $\begin{cases} y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

3. La funzione definita da $f(x) = -1/x^2$ è soluzione dell'equazione 1? La funzione definita da $g(x) = \ln(x)$ è soluzione dell'equazione 1? Giustificare le risposte.

4. Supponiamo che lo spostamento di una molla in un mezzo viscoso sia determinato dall'equazione $\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 0$ e che al tempo $t = 0$ si abbia $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 3$.
   a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo e disegnarne il grafico.
   b. Determinare, se esiste, il limite dello spostamento quando il tempo tende a $+\infty$
   c. Determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui lo spostamento della molla che al tempo $t = 0$ soddisfa a $y(0) = a, \quad \dot{y}(0) = b$ decresce senza oscillare.

7.3 Lez. 87 - 88. Lunedí 16/12

Esercizi

7.4 Lez. 89 - 90. Giovedí 19/12

Esercizi

7.5 Lez. 90 - 92. Venerdí 20/12

Ore 10:20 (circa), in aula 004 del Vl.Morgagni, il Dott. Alessandro Rossi (IFAC-CNR, Firenze) terrà un seminario dal titolo:

Squali, orate e detriti spaziali: modelli evolutivi

Al termine, esercizi in aula 103.