Analisi I - CEA - 2013-14 - Appello 3

Gianna Stefani

February 24, 2014

Contents

1 Risposta aperta

1.1 ApertaFniEintegraleA3 (Q/R:)

1.1.1: A partire dai grafici delle funzioni $x \mapsto \ln(2+x)$ e $x \mapsto \frac{1}{x^3}$, che devono ritenersi noti, disegnare il grafico di $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} & \text{se } |x| \geq 1 \\ \ln(2+x) & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$ e rispondere alle seguenti domande.

1. A partire dal grafico, determinare dominio, insieme di continuità, insieme di derivabilità, immagine, gli eventuali massimo e minimo assoluto con i relativi punti di massimo e minimo.
2. Determinare la funzione derivata.
3. Determinare numero a segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
4. Determinare l'area della parte limitata di piano compresa fra il grafico della funzione, gli assi cartesiani e la retta verticale $x = -3$.
5. Dopo aver spiegato la relazione fra integrale di Riemann e area, usare tale relazione e le proprietà degli integrali per calcolare $\displaystyle\int_0^{-3} f(t)dt$, a partire dal calcolo del risultato del punto precedente.
6. Calcolare, usando la definizione, il carattere e l'eventuale valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$.
7. Enunciare la regola di derivazione della funzione $F \circ G$, specificando le ipotesi sulle funzioni F e G. Applicarla al calcolo della funzione derivata della funzione definita da $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x^2-4}} f(t)dt$, facendo attenzione al dominio e specificando chi siano, in questo caso, le funzioni F e G.

R 1.1.1.1: Motivare la risposta.

1.1.2: Disegnare il grafico della funzione definita da $x \mapsto |x|^{|x|}$ e verificare che la funzione è estendibile per continuità a zero (con quale valore?). *Suggerimento: si osservi che la funzione è pari*
Rispondere alle seguenti domande sulla funzione estesa che chiameremo f.

1. Determinare dominio, insieme di continuità, insieme di derivabilità e funzione derivata.

2. Determinare immagine, gli eventuali massimo e minimo assoluto con i relativi punti di massimo e minimo.
3. Determinare l'esistenza di eventuali punti angolosi, cuspidi e flessi a tangente orizzontale, motivando le risposte in base alle definizioni.
4. Calcolare, usando la definizione, il carattere dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$.
5. Considerare la funzione definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. A partire dalla relazione fra integrale di Riemann e area, dimostrare che F è dispari. Dopo aver enunciato il teorema fondamentale del calcolo per funzioni continue, a partire dal grafico di f e dal precedente punto, disegnare il grafico di F e scrivere l'equazione della tangente al grafico di F nel punto di ascissa $x = 0$.
6. Enunciare la regola di derivazione della funzione $F \circ G$, specificando le ipotesi sulle funzioni F e G. Applicarla al calcolo della funzione derivata della funzione definita da $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(t)dt$, facendo attenzione al dominio e specificando chi siano, in questo caso, le funzioni F e G.

R 1.1.2.1: Motivare la risposta.

1.2 ApertaSerieA3 (Q/R:)

1.2.1: Definire il significato di "la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge" e rispondere alle seguenti domande sulla serie, dipendente dal parametro reale $x \in \mathbb{R}$, data da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}\,.$$

1. Dopo aver definito cosa significa che la serie converge assolutamente ed enunciato il teorema sul rapporto fra convergenza e convergenza assoluta, provare che la serie è assolutamente convergente se $|x| < 1$.
2. Provare, usando la definizione, che la serie diverge se $x = 1$.
3. Provare, usando un opportuno teorema, che la serie converge se $x = -1$.
4. Provare, usando un opportuno teorema, che la serie diverge se $x > 1$.
5. Provare, usando la condizione necessaria per la convergenza di una serie, che la serie non converge se $x < -1$.

R 1.2.1.1: Motivare le risposte

1.2.2: Definire il significato di "la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge" e rispondere alle seguenti domande sulla serie, dipendente dal parametro reale $x \in \mathbb{R}$, data da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}\,.$$

1. Dopo aver definito cosa significa che la serie converge assolutamente ed enunciato il teorema sul rapporto fra convergenza e convergenza assoluta, provare che la serie è assolutamente convergente se $|x| \leq 1$.
2. Provare, usando un opportuno teorema, che la serie diverge se $x > 1$.
3. Provare, usando la condizione necessaria per la convergenza di una serie, che la serie non converge se $x < -1$.

R 1.2.2.1: Motivare le risposte

1.3 ApertaEDOA3 (Q/R:)

1.3.1: Enunciare il Teorema di Cauchy per le EDO lineari del primo ordine ed applicarlo per determinare su quale intervallo massimale è definita la soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} y' & = -\frac{5}{x}y + x \\ y(-1) & = 3 \end{cases}$$

Determinare la soluzione e confrontarla con la soluzione di

$$\begin{cases} y' & = -\frac{5}{x}y + x \\ y(1) & = 3 \end{cases}$$

R 1.3.1.1: Motivare la risposta.

1.3.2: Enunciare il Teorema di Cauchy per le EDO lineari del primo ordine ed applicarlo per determinare su quale intervallo massimale è definita la soluzione del seguente problema.

$$\begin{cases} y' & = -\frac{9}{x}y + x \\ y(-2) & = -3 \end{cases}$$

Determinare la soluzione e confrontarla con la soluzione di

$$\begin{cases} y' & = -\frac{9}{x}y + x \\ y(2) & = -3 \end{cases}$$

R 1.3.2.1: Motivare le risposte

1.4 ApertaTaylorA3 (Q/R:)

1.4.1:

1. Scrivere il Polinomio di McLaurin di ordine $2n+2$ di $\sin(x)$.
2. Usando una opportuna sostituzione, usare il punto precedente per calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 24 di $\sin(x^7)$, specificando quale proprietà del polinomio viene usata.
3. Usando il punto precedente, determinare l'ordine di infinitesimo, se esiste, di $\sin(x^7)$, spiegando i presupposti teorici.
4. Dare la definizione di due funzioni equivalenti per $x \to 0$.
5. Enunciare il teorema di sostituzione di infinitesimi equivalenti nel calcolo del limite delle forme indeterminate. Dimostrare il teorema.
6. Usare i punti precedenti per calcolare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^n}{\sin(x^7) - x^7}$.

R 1.4.1.1: Motivare la risposta.

1.4.2:

1. Scrivere il Polinomio di McLaurin di ordine $2n+1$ di $\cos(x)$.
2. Usando una opportuna sostituzione, usare il punto precedente per calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 27 di $\cos(x^6)$, specificando quale proprietà del polinomio viene usata.
3. Usando il punto precedente, determinare l'ordine di infinitesimo, se esiste, di $\cos(x^6) - 1$, spiegando i presupposti teorici.

4. Dare la definizione di due funzioni equivalenti per $x \to 0$.
5. Enunciare il teorema di sostituzione di infinitesimi equivalenti nel calcolo del limite delle forme indeterminate. Dimostrare il teorema.
6. Usare i punti precedenti per calcolare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^6)-1}{x^n}$.

R 1.4.2.1: Motivare la risposta.