1 Esercizi su limiti e continuità

1.1 Esercizi svolti sui limiti

1. Dimostrare in base alla definizione di limite che $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

   Svolgimento. Fissiamo $\epsilon > 0$ e consideriamo la disequazione $|x^2 - 4| < \epsilon$.
   Se $|x-2| < 1$, si ha $|x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| < 3|x-2|$, quindi se
   $|x-2| < \delta = \min\{1, \epsilon/3\}$, la disequazione è soddisfatta e il limite provato.

2. Usando la definizione verificare che $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

   Svolgimento. Fissato un arbitrario $k > 0$ e studiamo la disequazione $1/x^2 > k$. Dato che x^2 e k sono positivi (ricordarsi che $x \neq 0$), tale disequazione è equivalente a $0 < x^2 < 1/k$. Quindi $1/x^2 > k$ se (e solo se) $0 < |x| < 1/\sqrt{k}$. Di conseguenza, un qualunque (positivo) $\delta \leq 1/\sqrt{k}$ fa al caso nostro.

3. Usando la definizione verificare che la funzione $f(x) = 1/x$ tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$.

   Svolgimento. Fissiamo $k > 0$ e determiniamo $\delta > 0$ in modo che si abbia $1/x < -k$ per $x \in (-\delta, 0)$. Occorre quindi studiare la disequazione $1/x < -k$, con $x < 0$. Poiché entrambi i membri della disequazione sono negativi, si ottiene $0 > x > -1/k$. Quindi possiamo concludere che la disequazione $1/x < -k$ è verificata per $x \in (-\delta, 0)$, dove $\delta = 1/k$.

4. Usando la definizione verificare che la funzione $1/x$ tende a zero per $x \to -\infty$ (anche per $x \to +\infty$).

   Svolgimento. Fissato $\epsilon > 0$, mostriamo che esiste un intorno di $-\infty$ (cioè una semiretta negativa) in cui è soddisfatta la disequazione $|1/x| < \epsilon$. Se scegliamo $x < -1/\epsilon$ si ha che $-\epsilon < 1/x < 0$. Possiamo quindi concludere che, fissato $\epsilon > 0$, la disuguaglianza $|1/x| < \epsilon$ è soddisfatta per $x < -1/\epsilon$ (o un qualunque altro numero minore di $-1/\epsilon$).

1.2 Esercizi proposti

1. Calcolare $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x^2)$

2. Osservare che: $f(x) \to \beta$ per $x \to \alpha$ equivale ad affermare per ogni intorno fissato I di β, $f(x) \in I$, definitivamente per $x \to \alpha$. Quindi abbiamo $f(x) \to 3$ per $x \to -\infty$ se e solo se: per ogni $\epsilon > 0$ fissato, $|f(x) - 3| < \epsilon$, definitivamente per $x \to -\infty$.

3. Dare esempi simili al precedente per altri tipi di limite.

4. Prima graficamente e poi usando la definizione verificare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0^\pm} \operatorname{sgn}(x) = \pm 1, \quad \lim_{x\to 0} |x| = 0, \quad \lim_{x\to 0} (x)^a = 0, \ a \in \mathbb{R}^+$$

5. Usando i concetti di traslazione e cambio scala disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

   e calcolarne graficamente i limiti per x che tende a ± 1 e $\pm\infty$. Fare la verifica dei limiti trovati, usando la definizione.

6. Date le funzioni $f : x \mapsto n \in \mathbb{Z}, \forall x \in (n-1, n]$, $g : x \mapsto n \in \mathbb{Z}, \forall x \in [n, n+1)$, disegnarne il grafico e determinare al variare di $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to n^{\pm}} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to n^{\pm}} g(x).$$

La funzione g si chiama *parte intera*.

7. Sia $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$. Calcolare al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \lim_{x \to 0} f(x)$$

8. Sia $f(x) = \frac{ax^3+x^2+1}{bx^4+cx^3+x}$. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \lim_{x \to 0} f(x).$$

9. Considerare le funzioni degli esercizi proposti nella sezione 1.4 degli esercizi sulle nozioni di base e determinare in quali insiemi sono continue. Determinare inoltre gli eventuali asintoti.

10. Delle seguenti funzioni si disegni il grafico e si determinino gli eventuali punti di discontinuità e gli eventuali asintoti.

$$x \mapsto \arcsin(x+5) - \pi/4, \quad |\arcsin(x+5) - \pi/4|, \quad \ln(x-1) + 1, \quad |\ln(x-1) + 1|$$

$$x \mapsto \cos(\pi(x+1)), \quad |\cos(\pi(x+1))|, \quad \arctan(x-1) - \pi/2, \quad |\arctan(x-1) - \pi/2|$$

11. Disegnare il grafico della seguente funzione e determinarne l'esistenza di discontinuità e di asintoti.

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & x < -1 \\ \arccos(x) & x \in [-1, 1] \\ \arctan(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

12. Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni delle seguenti equazioni

$$\arccos(x-5) - \pi/4 = k, \quad (x-1)^2 - 1 = k$$

13. Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, per tutte le funzioni f definite nei precedenti esercizi

14. Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni risultano continue su tutto $\mathbb{R}$; determinare inoltre se hanno asintoti.

$$x \mapsto \begin{cases} 3x+5 & x \leq 3 \\ x+a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x/a+5 & x \leq 3 \\ x+a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos(ax) & x \leq 0 \\ \sin(x+a) & x > 0 \end{cases},$$

15. Determinare il dominio, gli zeri e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni. Determinarne anche il segno usando il teorema degli zeri

$$x \mapsto (x^3 - 9x)(x^2 + 2x + 1), \quad x\cos(x), \quad \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x - 4}, \quad \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^4 - 16}$$

16. Determinare gli eventuali asintoti della funzione definita da
$$f(x) = \frac{x^3 - 2x - 3}{x + 5}$$
Inoltre, usando il teorema degli zeri determinarne il segno

17. Determinare dominio, eventuali asintoti, zeri e segno delle funzioni definite da $f(x) = \ln(x^3 - 4x^2 + 2x + 1)$ e $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x}{x^2 + 1.}$

18. Calcolare eventuali asintoti, zeri, min e max (se esistono) della funzione
$$f(x) = |x^3 - 3x^2 - 2x + 6|.$$

19. **Confronti asintotici.** Calcolare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$
$$\lim_{x \to \pm\infty} x^n \sin(1/x^3)$$
Inoltre dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette, specificandone il motivo
    (a) $x^2 \ln(x) = o(x)$ per $x \to 0^+$
    (b) $x^2 \ln(x) = o(x \ln(x))$ per $x \to 0^+$
    (c) $x \ln(x) = o(x)$ per $x \to 0^+$
    (d) $x^2 \ln(x) = o(x^r)$ per $x \to 0^+$ se $r \in (0, 1)$
    (e) $x^2 \ln(x) = o(x^r)$ per $x \to 0^+$ se $r > 0$
    (f) $\sin(x) = o(x^r)$ per $x \to 0$ se $r \in (0, 1]$
    (g) $\sin(x) = o(x^r)$ per $x \to 0$ se $r \in (0, 1)$
    (h) $\sin(x) \sim x^r$ per $x \to 0$ se $r > 1$)
    (i) $\cos(x) - x \sim \dfrac{x^2}{2}$ per $x \to 0$
    (j) $\cos(x) - 1 = o(x)$ per $x \to 0$
    (k) $\cos(x) - x \sim x$ per $x \to 0$
    (l) $\exp(1/x^2) \sim \dfrac{1}{x^2}$ per $x \to 0$
    (m) $\exp(1/x^2) = o(x^r)$ per $x \to 0$ se $r \geq 1$
    (n) $\exp(-1/x^2) = o(1)$ per $x \to \infty$
    (o) $\exp(-1/x^2)$ è un infinitesimo di ordine 10^{20} per $x \to 0$
    (p) $\sin(7x^4) + \exp(-1/x^2)$ è un infinitesimo di ordine 4 per $x \to 0$