

Analisi I - B199 - 16 Gennaio 2014

1. A partire dai grafici delle funzioni $x \mapsto \arcsin(x)$ e $x \mapsto \frac{1}{x}$, che devono ritenersi noti, disegnare il grafico di $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } |x| \geq 1 \\ \arcsin(x) & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$ e rispondere alle seguenti domande sulla funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- (a) Determinare il dominio.
- (b) Calcolare, se esiste, $F(-3)$.
- (c) Determinare dove F è continua, dove è derivabile e gli eventuali asintoti verticali.
- (d) Determinare eventuali punti angolosi, cuspidi e flessi a tangente verticale.
- (e) Dopo aver enunciato il teorema fondamentale del calcolo, applicarlo per stabilire gli intervalli di crescita e decrescenza.
- (f) Mettere in relazione l'esistenza di asintoti orizzontali di F con gli opportuni integrali impropri di f e provare, usando la definizione, che F non ha asintoti.
- (g) Disegnare il grafico di F .

Enunciare la regola di derivazione della funzione composta ed applicarla al calcolo della derivata della funzione definita da

$$G(x) = \int_0^{x^4} f(t) dt.$$

Motivare adeguatamente le risposte

2. Enunciare e provare la condizione necessaria affinché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converga e rispondere alle seguenti domande sulla serie, dipendente dal parametro reale x , data da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}.$$

- (a) Dopo aver definito cosa significa che la serie converge assolutamente, provare che la serie è assolutamente convergente se $|x| < 1$.
 - (b) Provare che la serie diverge se $x = 1$.
 - (c) Provare che la serie converge se $x = -1$.
 - (d) Provare che la serie diverge se $x > 1$.
 - (e) Provare che la serie non converge se $x < -1$.
3. Enunciare il Teorema di Cauchy per le EDO lineari del primo ordine ed applicarlo per determinare su quale intervallo massimale è definita la soluzione del seguente problema

$$f(x) = \begin{cases} y' & = -\frac{3}{x}y + x \\ y(-1) & = 3 \end{cases}$$

Determinare la soluzione e disegnarne un grafico approssimato.