1 Esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie

1.1 Oscillatore armonico forzato

$$y'' + \omega^2 y = A\cos(\gamma x) + B\sin(\gamma x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R} \tag{1}$$

In questo caso, per le proprietà di derivazione di seno e coseno, l'intuito suggerisce di ricercare una soluzione del tipo $h(x) = c_1\cos(\gamma x) + c_2\sin(\gamma x)$, dove c_1, c_2 sono numeri reali da determinare. In effetti, se $\gamma \neq \omega$, si perviene all'identità

$$c_1(\omega^2 - \gamma^2)\cos(\gamma x) + c_2(\omega^2 - \gamma^2)\sin(\gamma x) = A\cos(\gamma x) + B\sin(\gamma x)$$

che ci permette di determinare c_1, c_2 in maniera unica. Si ha la soluzione particolare $h(x) = \frac{A}{(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma x) + \frac{B}{(\omega^2-\gamma^2)}\sin(\gamma x)$ e quindi alla soluzione generale dell'equazione (1)

$$y = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)) + \frac{A}{(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma x) + \frac{B}{(\omega^2-\gamma^2)}\sin(\gamma x)\,.$$

Si noti che in questa formula A, B, ω, γ sono dati del problema, mentre α, β sono le costanti arbitrarie. Le soluzioni di (1) sono periodiche se e solo se ω/γ è razionale (provarlo per esercizio), comunque in questo caso ogni soluzione è limitata.

1.1.1 Risonanza, caso $\gamma = \omega$

$$y'' + \omega^2 y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

In questo caso, il precedente metodo non conduce a nessuna soluzione. Questo non deve meravigliare, visto che la $h(x)$, sopra definita, è soluzione dell'equazione omogenea associata. In questo caso la soluzione particolare si cerca del tipo $h(x) = x\,(c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x))$ e si perviene all'identità

$$2\,(c_2\omega\cos(\omega x) - c_1\omega\sin(\omega x)) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

che ci permette di determinare c_1, c_2 in maniera unica. Si ha la soluzione particolare $h(x) = x\left(-\frac{B}{2\omega}\cos(\omega x) + \frac{A}{2\omega}\sin(\omega x)\right)$ e quindi alla soluzione generale dell'equazione (1)

$$y = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)) + x\left(-\frac{B}{2\omega}\cos(\omega x) + \frac{A}{2\omega}\sin(\omega x)\right)\,.$$

In questo caso le soluzioni sono tutte illimitate e consistono in un'onda la cui ampiezza tende all'infinito. Come esempio si disegni il grafico della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 9y = 6\cos(3x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Ripetendo la procedura seguita si perviene alla soluzione generale dell'equazione:

$$y = \alpha\cos(3x) + (\beta + x)\sin(3x)\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 3\beta = 0\,, \end{cases}$$

per cui la soluzione risulta $y = x\sin(3x)$. Si noti che in questo problema di Cauchy condizioni iniziali nulle portano ad una soluzione non nulla; questo non è in contraddizione con la teoria generale perchè l'equazione non è omogenea.

1.2 Esercizi

1. **Caduta dei gravi in mezzo viscoso.** Il moto avviene in direzione verticale e, detto $k > 0$ il coefficiente di viscosità e m la massa, l'equazione diventa la seguente equazione lineare a coefficienti costanti
$$z''(t) = -g - \frac{k}{m} z'(t).$$
Trovarne la soluzione generale cercando una soluzione particolare del tipo $z = At$.
Indicando la velocità z' con v e $\mu = \frac{k}{m} > 0$ si ottiene l'equazione differenziale *lineare del primo ordine non omogenea*
$$v'(t) + \mu v(t) = -g.$$
Determinarne la soluzione generale e risalire alla soluzione generale della EDO del secondo ordine. Confrontare i risultati ottenuti.

2. **Equazione di moto del pendolo per le piccole oscillazioni**. Un pendolo di lunghezza l, spostato di un angolo orientato α dalla posizione di equilibrio stabile $\alpha = 0$ è sottoposto ad una forza (risultante della forza peso e della reazione vincolare) che ha direzione tangente alla circonferenza descritta dal pendolo e verso che si oppone allo spostamento. Un semplice conto trigonometrico mostra che l'intensità della forza è data da $m\, g \sin(\alpha)$ (m massa, g accelerazione di gravità). L'equazione fondamentale della dinamica implica che lo spostamento dalla posizione di equilibrio $t \mapsto s(t) = l\, \alpha(t)$ soddisfa alla seguente equazione differenziale non lineare del secondo ordine.
$$s''(t) + g \sin(s(t)/l) = 0.$$
Piccole oscillazioni. Significa che consideriamo la parte principale della forza, in questo caso l'equazione diventa lineare del secondo ordine. Indicando con ω^2 il numero positivo g/l, si ottiene
$$s''(t) + \omega^2\, s(t) = 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad \alpha''(t) + \omega^2\, \alpha(t) = 0,$$
detta anche equazione del moto armonico. Si noti che una equazione simile si ottiene anche quando siamo in presenza di una forza elastica che si oppone al moto.

   (a) Usare la teoria svolta per dimostrare che, per ogni $A, B \in \mathbb{R}$, la funzione $t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ è soluzione dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni e che al variare di $A, B \in \mathbb{R}$ otteniamo tutte le soluzioni dell'equazione.

   (b) Verificare che, per ogni $\rho, \beta \in \mathbb{R}$, la funzione $t \mapsto \rho\cos(\omega t + \beta)$ è soluzione dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni.

   (c) Verificare che le forme (a) e (b) per le soluzioni del moto armonico sono equivalenti. Nella forma (b) alle coppie di parametri (ρ, β) e $(-\rho, \beta + \pi)$ corrisponde la stessa soluzione. Nelle applicazioni spesso si usa $\rho \geq 0$ e $\beta \in [0, 2\pi)$. ρ è detta ampiezza dell'oscillazione e β fase. Inoltre a $\rho = 0$ o equivalentemente a $A = B = 0$ corrisponde la soluzione nulla. Disegnare il grafico delle soluzioni in funzione di ampiezza e fase.

   (d) Determinare la soluzione dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni con condizioni iniziali $s(0) = s_0,\ s'(0) = 0$ (spostamento del pendolo dalla posizione di equilibrio) e con condizioni iniziali $s(0) = 0,\ s'(0) = v_0$ (spinta del pendolo nella posizione di equilibrio). A quale problema di Cauchy corrisponde la soluzione nulla?

3. Studiare le soluzioni di $y'' + 2\mu y' + \omega^2 y = 0,\ \mu > 0$, in dipendenza del discriminante dell'equazione caratteristica. Tale equazione è anche detta moto armonico smorzato e corrisponde al fatto che alla forza elastica si aggiunge una componente di "viscosità" che e' proporzionale alla velocità e si oppone al moto.

4. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine sulla semiretta $(0, +\infty)$
$$x^2 y'' + 2xy' - \frac{15}{4} y = 0.$$
   a. Verificare che $y(x) = x^{3/2}$ e $y = x^{-5/2}$ sono soluzioni della precedente equazione
   b. Determinare la soluzione generale della precedente equazione
   c. Determinare la soluzione del problema con condizioni iniziali
$$y(1) = 1, \qquad y'(1) = 2$$

5. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine
$$y'' + 3y' + 3y = 0.$$
   a. Determinare la soluzione generale della precedente equazione.
   b. Determinare la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali
$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$$
   c. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali
$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$
   tende a 0 per $x \mapsto +\infty$?

6. Supponiamo che lo spostamento di una molla in un mezzo viscoso sia determinato dall'equazione
$$\ddot{y} + \dot{y} + y = 0$$
   e che al tempo $t = 0$ si abbia $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 2$
   (a) Determinare lo spostamento in funzione del tempo
   (b) Determinare, se esiste, il limite dello spostamento quando il tempo tende a $+\infty$
   (c) Determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui lo spostamento della molla che al tempo $t = 0$ soddisfa a
$$y(0) = a, \qquad \dot{y}(0) = b$$
   decresce senza oscillare.

7. Determinare la soluzione generale delle equazioni lineare del primo ordine
$$y' = -4y + 3x + 1 \ , \quad y' = y + \sin(x)$$

8. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = 3y + e^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y' = 2y + e^{2x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

9. Determinare la soluzione generale di
$$y'' + 2y' - 3y = e^{4x},$$
cercando una soluzione particolare del tipo $y = Ae^{4x}$.

10. Risolvere i problemi di Cauchy con $x(0) = 1$ associati alle seguenti equazioni
$$x' = 4x \;, \quad x' = x + 3t^3 + 4t^2 + 1$$
$$x' = x + \sin(t) \;, \quad x' = 3x + \exp(2t)$$

11. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy, specificando il dominio della soluzione:
$x'' + 9x = -\sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$
$x' = 1/(1 - t^2)x$, $x(0) = 2$

12. Determinare la soluzione generale di:
$x'' + x = t^3 - t + 1$, cercando una soluzione particolare fra i polinomi di grado 3.

13. Verificare che se y_1 è soluzione particolare di $y'' + ay' + b = f_1(t)$ e y_2 è soluzione particolare di $y'' + ay' + b = f_2(t)$, allora $(y_1 + y_2)$ è soluzione particolare di $y'' + ay' + b = f_1(t) + f_2(t)$

14. Supponiamo che un'oscillazione forzata sia determinata dalla seguente equazione differenziale
$$\ddot{x} + 16x = -\cos(t)$$
e che al tempo 0 lo spostamento valga $x(0) = 0$ e la velocità valga $\dot{x}(0) = -1$

    a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo
    b. Esiste l'ampiezza massima dell'oscillazione? Come si puó determinare?
    c. Si può decidere, senza calcolare la soluzione generale dell'equazione, se l'oscillazione è limitata?

15. Supponiamo che un'oscillazione forzata sia determinata dalla seguente equazione differenziale
$$\ddot{x} + 9x = -\sin(3t)$$

    a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo e della posizione e velocità al tempo 0
    b. Determinare, se esiste, l'ampiezza massima dell'oscillazione
    c. Si può decidere, senza calcolare la soluzione generale dell'equazione, se l'oscillazione è limitata?

16. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine
$$y'' + 4y' + y = \sin(3x) \,. \tag{3}$$

    a. Determinare la soluzione generale dell' equazione omogenea associata.
    b. Determinare la soluzione generale dell' equazione non omogenea, cercando una soluzione particolare del tipo $y = A\cos(3x) + B\sin(3x)$.
    c. Determinare la soluzione dell'equazione non omogenea con condizioni iniziali
    $$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$$
    d. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la soluzione delle equazioni (omogenea e non omogenea) con condizioni iniziali
    $$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$
    tende a $-\infty$ per $x \mapsto +\infty$?