

Analisi Matematica I - B199 - E-N

Secondo Appello - 12 febbraio 2014

1. A partire dai grafici delle funzioni $x \mapsto 3^x$ e $x \mapsto \frac{1}{x^5}$, che devono ritenersi noti, disegnare il grafico di

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & \text{se } |x| > 1 \\ 3^x & \text{se } |x| \leq 1 \end{cases}$$

e rispondere alle seguenti domande.

- (a) Determinare l'immagine, l'eventuale massimo e minimo e gli eventuali punti di massimo e minimo.
 - (b) Determinare numero a segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
 - (c) Determinare l'area della parte limitata di piano compresa fra il grafico della funzione, gli assi cartesiani e la retta $x = -1$.
 - (d) Dopo aver spiegato la relazione fra integrale di Riemann e area, usare tale relazione e le proprietà degli integrali per calcolare $\int_0^{-1} f(t)dt$, a partire dal risultato del punto precedente.
 - (e) Calcolare, usando la definizione, il carattere e l'eventuale valore dell'integrale improprio $\int_0^{-\infty} f(t)dt$.
 - (f) Enunciare la regola di derivazione della funzione composta ed applicarla al calcolo del dominio e della legge della funzione derivata della funzione $G: x \mapsto \int_0^{\sqrt{x^2-9}} f(t)dt$.
2. (a) Enunciare la relazione fra il polinomio di McLaurin di ordine n di una funzione F e quello di ordine $n-1$ della sua derivata F' .
- (b) Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo per funzioni continue su un intervallo, secondo lo schema: ipotesi e tesi. Inoltre (**facoltativo**) se ne dia la dimostrazione.
- (c) Usando i punti precedenti, calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 9 della funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Suggerimento: usare un opportuno polinomio di McLaurin di e^x e il cambio di variabile, poi usare i punti precedenti.

- (d) Calcolare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{F(x) - x}$.

3. Usando la definizione stabilire, al variare di $x \in \mathbb{R}$, il carattere della seguente serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+4)^{2n}}{16^n}$$

4. Enunciare il teorema di Cauchy per le EDO lineari del secondo ordine ed applicarlo al seguente problema per determinarne l'unicità e il dominio della soluzione

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{x} - x \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}.$$

Calcolare la soluzione, spiegandone i presupposti teorici.