Corso di Laurea in Ingegneria Civile-Edile-Ambiente
Analisi Matematica I - lettere E-N

Lezioni A.A. 2012/2013 prof. G. Stefani
17/9/12 - 21/12/12

In questo file sono riportati gli argomenti delle lezioni e *va essenzialmente inteso come un programma d'esame dettagliato.* Sono inoltre proposti esercizi e, occasionalmente, integrazioni o semplificazioni della teoria. Altri esercizi saranno proposti nella pagina web del corso.

Se non specificato altrimenti, i capitoli e i paragrafi citati si riferiscono al testo di riferimento: *Bertsch - Dal Passo - Giacomelli, Analisi Matematica, seconda edizione, McGraw-Hill.*

Può essere usato qualsiasi testo di Analisi Matematica, usando il registro delle lezioni come indice.

I prerequisiti al corso sono elencati in dettaglio nel programma del corso. Gli argomenti verranno ripetuti al corso di recupero, che si consiglia di seguire agli studenti che hanno avuto un basso punteggio nella parte matematica del test di accesso, anche se hanno assolto il debito.

Alcuni concetti particolarmente importanti o da precisare a livello universitario saranno richiamati durante il corso, inoltre alcuni richiami si trovano anche sul testo di riferimento.

1 Preliminari e nozioni di base

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 1.1 – 1.3, 2.1 del testo. I contenuti del paragrafo 1.4, saranno fatti nel corso di Geometria e Algebra lineare, ma saranno utilizzati in questo corso nello studio delle EDO (equazioni differenziali ordinarie). Gli studenti sono tenuti a studiare anche l'Appendice 1.A che fa parte dei prerequisiti

1.1 Lez. 1-2. Lunedí 17/09

Spiegazioni sullo svolgimento del corso. Numeri naturali, interi, razionali, reali, notazioni insiemistiche, quantificatori e implicazioni

$$x \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Operazioni e loro proprietà. Proprieta' di ordine ($<, \leq$). Proprietà di densità. Proprietà di Archimede. Allineamenti decimali e la retta reale.
Valore assoluto (o modulo) e distanza. Disuguaglianza triangolare e di Cauchy Schwartz. Intervalli (limitati, illimitati, aperti, chiusi, semiaperti) e loro estremi. Lunghezza o misura di un intervallo limitato e sua rappresentazione in termini di distanza. Centro (punto medio) e raggio degli intervalli limitati.
Esercizi: 1) dato un intervallo limitato, trovare la relazione fra gli estremi, il centro e raggio;
2) completare le seguenti uguaglianze: $|x-4| = \cdots$, $\quad |x+7| = \cdots$;
3) risolvere graficamente, con la nozione di distanza e valore assoluto, le seguenti disequazioni: $|x+4| < |x-3|$, $\quad x^2 - 4 < 0$, $\quad x^2 \geq 8$, $\quad x^2 \geq -5$, $\quad x^2 \leq -5$.

1.2 Lez. 3-4. Giovedí 20/09

Insiemi finiti. Insiemi limitati (superiormente limitati, inferiormente limitati), maggioranti (minoranti) massimo (minimo), estremo superiore (inferiore) di un insieme. Esempi. Proprieta' di completezza (o continuità) dei numeri reali e cenni sulle sue implicazioni:

esistenza delle radici, potenze a base reale, logaritmi. Dimostrazione per assurdo della seguente proposizione: $\sqrt{2}$ *non è razionale*, e *quindi l'insieme* $\mathbb{Q}$ *non è completo.*
Riguardare le proprietà di radici potenze e logaritmi.

1.3 Lez. 5 - 6. Venerdí 21/09

Elementi di logica: implicazioni, ipotesi tesi, condizioni necessarie e sufficienti.
Definizione di funzione (o applicazione) da un insieme X a un insieme Y, dominio, codominio, immagine, grafico. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche, funzione inversa, funzione identità. Insiemi numerabili. Insiemi infiniti.
Esercizi. 1) Determinare estremi superiore, inferiore, max, min, degli intervalli.
2) Determinare sup, inf e, se esistono, max, min dei seguenti insiemi: $\{1/(n+3) \colon n \in \mathbb{N}\}$, $\{1/n \colon n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, $\big\{x \in \mathbb{R} \colon 4 \leq x^2 \leq 9\big\}$.
3) Significato delle seguenti proposizioni: $M \neq \sup A$, A è illimitato
4) Dimostrazione delle seguenti proposizioni: $0 = \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$, $1/1000 \neq \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$, $-1 \neq \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$
5) Riscrivere le seguenti proposizioni mediante ipotesi e tesi e come condizioni necessarie e sufficienti, quindi dimostrarle: $M = \max A \Rightarrow M = \sup A$, $M = \max A \Leftrightarrow M = \sup A$ e $M \in A$, $\sup A \in A \Leftrightarrow \sup A = \max A$, $\exists \max A \Leftrightarrow \sup A \in A$
6) Enunciare e dimostrare proposizioni analoghe alle precedenti per l'estremo inferiore e il minimo.
7) Fare gli esercizi del testo e delle sezioni 1,2,3 sulle nozioni di base proposti sulla pagina web.

2 Funzioni, generalità

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 2.1 – 2.8 del testo. Gli studenti sono tenuti a studiare anche l'Appendice 2.A che fa parte dei prerequisiti

2.1 Lez. 7 - 8. Lunedì 24/09

Funzioni reali di una variabile reale: notazioni, dominio, immagine, grafico, equazione del grafico. **Convenzione sul dominio** (dominio naturale, campo di esistenza) e proprietà del grafico.
Esempi di grafici di funzioni elementari: funzioni costanti, funzione identità, valore assoluto, potenze intere, radici. Funzioni definite a tratti.
Restrizione di una funzione. Funzioni superiormente (inferiormente) limitate, estremo superiore (inferiore), massimo (minimo), punto di massimo (minimo). Estremo superiore (inferiore), massimo (minimo) di una funzione su (o in) un sottoinsieme del dominio.
Funzioni pari, dispari, periodiche.

2.2 Lez. 9 - 10. Giovedì 27/09

Funzione crescente e decrescente. Le funzioni trigonometriche. Parte positiva, parte negativa e loro rapporto con la funzione e il suo valore assoluto.
Funzioni composte e loro proprietà, **esempio:** $\sqrt{x^2}$, $(\sqrt{x})^2$. Funzioni invertibili, funzioni inverse e loro grafici. Inversa della funzione radice. Grafici delle funzioni esponenziali e logaritmiche con base $a > 1$.

2.3 Lez. 10 - 11. Venerdì 28/09

Le funzioni trigonometriche inverse.
Metodi per disegnare il grafico di funzioni a partire da quello di funzioni note, cambiamento

di scala: $af(x)$, $f(ax)$, traslazioni orizzontali e verticali: $f(x \pm a)$, $f(x) \pm a$, simmetrie e valore assoluto: $-f(x)$, $f(-x)$, $f(|x|)$, $|f(x)|$).
Venerdì 28/09 ore 12 - 12:45. Soluzione di alcuni esercizi.

2.4 Lez. 12 - 13. Giovedì 4/10

Funzione monotona. Grafici delle funzioni potenza ad esponente reale. Cambiamento di base nelle funzioni esponenziali e logaritmiche, notazioni exp e ln. Le funzioni del tipo $x \mapsto f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ln(f(x))) = e^{g(x)\ln(f(x))}$, in particolare la funzione $x \mapsto x^x$.
Esercizio. Al variare del parametro reale a, si determini il dominio e si disegni il grafico della funzioni $f\colon x \mapsto (x-1)^a \sqrt{x-1}\, dt$ e $f\colon x \mapsto (x-1)^a \sqrt[3]{x-1}\, dt$.
Esercizio. Fra tutti i rettangoli di perimetro $2p > 0$, determinare quello di area massima (se esiste) e le sue proprietà geometriche.

2.5 Esercizi di ricapitolazione

1. Fare gli esercizi del testo e della sezione 4 sulle nozioni di base proposti sulla pagina web.
2. Quale dei seguenti insiemi rappresenta il grafico di una funzione reale di variabile reale? $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$.
3. Scrivere in forma esplicita la funzione il cui grafico è dato da $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - x = 4,\ y \geq 0\}$ e determinarne dominio, immagine, iniettività.
4. Risolvere graficamente le seguenti disequazioni: $|x+4| < |x-3|$, $x^2 - 4 < 0$, $x^2 \geq 8$, $x^2 \geq -5$, $x^2 \leq -5$.
5. Definire a tratti le funzioni $f(x) = |x-3|$, $|1/(x-3)|$, $|2x/(x^2-1)|$
6. Determinare dominio, immagine, grafico, eventuale funzione inversa e proprietà delle fuzioni definite da $f(x) = 1/x$, $1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x^2 - 2x$ su $(0,2)$
7. Usando la definizione provare che la funzione definita da $f(x) = x^3 - x$ non è iniettiva.
8. Usando la definizione provare che la funzione definita da $y = 3x + 2$ è invertibile e determinarne l'inversa.
9. Della funzione definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 1/x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$, determinare dominio, immagine, grafico.
10. Data la funzione $f : x \mapsto x^4 - \frac{3}{4}x^2$, determinanare $f^{-1}((\frac{1}{4}, +\infty))$
11. Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni e interpretarle in termini di grafici: $\sqrt{x-1} < x-3$, $\frac{2}{x}+3 < \frac{4}{x}-1$, $\frac{3}{x^2}+1 \leq x^2-1$, $\sqrt{x-1} < \sqrt{x}$, $\sqrt{x^2+2x-1} > 3-x$, $|x^2-4x-5| > -x$, $\sqrt{-x} < 5+x$.
12. Determinare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false: 1) $x \geq 5$ implica $x^2 > 30$; 2) $x = 0$ se e solo se $x^2 = 0$; 3) $x^3 \geq 8$ implica $x \geq 2$; 4) $x \geq 5$ è equivalente a $x^2 = 25$; 5) $x > 5$ implica $x^2 > 25$; 6) $x^2 > 25$ implica $x > 5$.
13. Determinare, usando la definizione, immagine, iniettività, suriettività della funzione definita da $f(x) = x^2 + 2x + 5$. Determinare inoltre estremo superiore, inferiore ed eventuali massimo, minimo, punti di massimo, punti di minimo.
14. Date f e g funzioni reali di variabile reale, osservare che:

(a) $g = f^{-1} \implies g \circ f = I_{D_f}$, $f \circ g = I_{D_g}$, $g^{-1} = f$.

(b) f, g iniettive (suriettive) $\implies g \circ f$ iniettiva (suriettiva)

(c) $g \circ f$ iniettiva $\implies f$ iniettiva

(d) $g \circ f$ suriettiva $\implies g$ suriettiva

esprimere le precedenti implicazioni in termini di ipotesi e tesi e di condizioni necessarie e sufficienti.

15. Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 - 2(x-3) + 2 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 7/(x+3) & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$, e determinarne estremo superiore e inferiore. La funzione ha massimo o minimo?

16. Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = ||x^2 - 4x| - 2|$, e determinarne estremo superiore e inferiore. La funzione ha massimo o minimo?

17. Dimostrare che

    (a) La funzione f definita da $f(x) = 1/x$ non è monotona ma lo è su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$, cioè lo sono le sue restrizioni a $(-\infty, 0)$ e a $(0, +\infty)$

    (b) Una funzione strettamente crescente è iniettiva, scrivendo esplicitamente ipotesi (Hp), tesi (Ts) e dimostrazione.

    (c) Una funzione strettamente crescente (decrescente) è crescente (decrescente), ma il viceversa non vale.

    (d) f è monotona se e solo se il prodotto $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1))$ non cambia mai segno, per ogni x_1 e x_2 nel dominio. Come posso esprimere in termini analoghi che è strettamente crescente (decrescente)?

    (e) Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ è strettamente monotona, allora è anche iniettiva e quindi invertibile.

    (f) La funzione $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1), \\ 3 - x & x \in [1,2] \end{cases}$, è iniettiva ma non è monotona in [0,2].

    (g) Date f e g funzioni reali di variabile reale allora: f, g monotone (strettamente) $\implies g \circ f$ monotona (strettamente), più precisamente: f, g crescenti o decrescenti $\implies g \circ f$ crescente, e ... completare i casi.

3 Limiti

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 3.1 – 3.6, 4.1, 4.2 e 5.3, 5.4 del testo. Non tutti gli argomenti del testo verranno affrontati, lo studente prenda il registro delle lezioni come indice

3.1 Lez. 14 - 16. Venerdí 5/10

L'insieme $\mathbb{R}^*$ dei reali estesi, intorni, punti interni esterni e di frontiera, insiemi aperti e chiusi, punti di accumulazione. Definizione di *definitivamente per* $x \to \alpha$. Definizione, mediante il concetto di intorno e usando le disuguaglianze, di: $\lim_{x \to r} f(x) = \ell$, $r, \ell \in \mathbb{R}$. Limiti destri e sinistri. Definizione di $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, usando gli intorni. Primi esempi, usando le disuguaglianze, completare le definizioni per esercizio. Esempi. Funzioni infinitesime, infinite e il simbolo $o(1)$ per $x \to \alpha$.

3.2 Lez. 17 - 18. Lunedí 8/10

Unicità del limite. "Localizzazione" del limite. Limite di funzioni costanti, limite delle funzioni identità, valore assoluto, segno. Limiti per eccesso e per difetto. Relazione fra limite, limite destro, limite sinistro. Esempi di limiti: $\lim_{x\to 0^\pm} f(x)$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ se $f(x) = x^n$, $\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ (e quindi in $\mathbb{Z}$) e se $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Definizione di $n!$ (Appendice 1.B del testo). Successioni convergenti, divergenti e irregolari (o indeterminate o oscillanti).

Esercizi da fare: specificare la nozione di limite nel caso delle successioni e calcolare i limiti delle successioni: $n \mapsto n$, n^n, $n!$. Limite di una funzione limitata per una funzione infinitesima.

3.3 Lez. 19 - 20. Giovedí 11/10

Proprietà dei limiti: permanenza del segno, teoremi del confronto e dimostrazione che $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$.

Limiti delle funzioni (definitivamente) monotone, applicazione al calcolo dei possibili limiti delle funzioni $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e alle successioni. Il numero e.

Teorema ponte e non esistenza di limiti. Esempi: $\lim_{x\to\pm\infty} \sin(x)$, $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$. Limiti delle funzioni elementari (senza dimostrazione).

3.4 Lez. 21 - 23. Venerdí 12/10

Algebra dei limiti e forme indeterminate:

$$\pm\infty + a = \pm\infty\,, \quad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$
$$a\,(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & a > 0 \\ \mp\infty & a < 0, \end{cases} \,, \quad (\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty\,, \quad (+\infty)(-\infty) = -\infty$$
$$\frac{a}{\pm\infty} = 0\,, \quad 1/0^\pm = \pm\infty\,, \quad 1/\pm\infty = 0^\pm\,.$$

Non sono invece definite le seguenti espressioni, dette *forme indeterminate*:
$(+\infty) + (-\infty)\,, \quad 0/0\,, \quad 0\,(\pm\infty)\,, \quad (\pm\infty)/(\pm\infty)$.

Il simbolo di sommatoria (paragrafi 1.5 e 4.6 del testo).

Limiti dei polinomi e delle funzioni razionali. Limite della composizione e cambiamento di variabile.

Esempi e esercizi: $\lim_{x\to 0} \ln(\sin(x)/x)$, limiti di $x \mapsto x^x$. $\lim \sin(n)/n$, $\lim_{x\to\pm\infty} \sin(x)/x$, $\lim_{x\to 0} x \sin(1/x)$.

3.5 Lez. 24 - 25. Lunedí 15/10

I simboli di Landau: definizione di $f(x) = o(g(x))$, $f \sim g$ per $x \to \alpha$. Calcolo dei limiti mediante funzioni asintotiche. Esempi. Esempi sull'algebra degli *o piccolo*. Infinitesimi di riferimento e ordine di infinitesimo: defininizione ed esempi. Limiti notevoli (senza dimostrazione): $\forall\alpha > 0$, si ha $\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$

Esempi ed esercizi: alcune funzioni che non ammettono ordine, interpretazione dei limiti notevoli mediante i simboli di Landau.

3.6 Lez. 26. Giovedí 18/10

Infiniti di riferimento e ordine di infinito: defininizione ed esempi. Limiti notevoli e funzioni infinite che non ammettono ordine. Limiti notevoli (senza dimostrazione): $\lim \frac{e^n}{n!} = 0$, $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$. Limiti che si possono dedurre da limiti noti col cambiamento di variabile.

3.7 Esercizi di ricapitolazione

1. Fare gli esercizi del testo sugli argomenti svolti.
2. Fare gli esercizi sui limiti proposti sulla mia pagina web
3. Usando la definizione provare i seguenti limiti (x_0 è un numero reale)

$$\lim_{x\to x_0^\pm} 1/(x-x_0) = \pm\infty\,,\quad \lim_{x\to x_0^\pm} 1/(x-x_0)^2 = +\infty\,,\quad \lim_{x\to\pm\infty} 1/(x-x_0) = 0^\pm.$$

   Stabilire inoltre per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste il limite per $x \to x_0$ di $1/(x-x_0)^n$.
4. Usando la definizione provare che $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1/(x-x_0)^n = 0\,,\quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > 0$. Determinare inoltre, al variare di $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, quali dei precedenti limiti sono per difetto o per eccesso.
5. Sia $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ e $f : x \in A \mapsto x^2$, verificare che l'unico limite di f che posso fare è quello per $x \to 0$, verificare inoltre, usando la definizione, che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Osservare che il limite coincide col limite destro e che non si può fare il limite sinistro.
6. Verificare che $\ln(1 + 1/n) \sim \frac{1}{n}$
7. Calcolare, al variare di $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0}(\sin(x))^2/x^m$ e dedurne l'ordine di infinitesimo di $(\sin(x))^2$ per $x \to 0$
8. Calcolare, al variare di $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^m}$ e dedurne l'ordine di infinitesimo di $1 - \cos(x)$ per $x \to 0$.
9. Calcolare l'ordine di infinitesimo di $\sin(\frac{k^2}{k^3+3})$ per $k \to +\infty$
10. Provare il seguente risultato: se $f(x) = o(1)$ per $x \to \alpha$ allora:
    1. $\sin(f(x)) \sim f(x)$ per $x \to \alpha$
    2. $1 - \cos(f(x)) \sim \frac{(f(x))^2}{2}$ per $x \to \alpha$.
11. Trovare l'infinitesimo di riferimento equivalente a $1 - \cos(\frac{x^2+2x}{3x^3+x^2+1})$, per $x \to +\infty$
12. Provare che $\sin(\frac{k^2}{k^3+3}) = \frac{1}{k}(1 + o(1))$ e che $\sin(\frac{k^2}{k^3+3}) > \frac{1}{2k}$ definitivamente per $k \to +\infty$.
    Suggerimento: operare il cambiamento di variabile $x = 1/k$ e ricordarsi il limite di $\sin(x)/x$ per $x \to 0$.

4 Funzioni continue

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 5.2, 6.1 - 6.5 del testo. Non tutti gli argomenti del testo verranno affrontati, lo studente prenda il registro delle lezioni come indice.

4.1 Lez.27. Giovedí 18/10

Continuità: definizione e relazione col limite, continuità a destra e sinistra, discontinuità eliminibili e di salto, estensione per continuità. Continuità su un insieme e la notazione $f \in C^0(A)$. Continuità delle funzioni elementari.

4.2 Venerdí 19/10 ore 9-10

Correzione di test a risposta multipla proposti.

4.3 Lez. 28 - 30. Venerdí 19/10

Continuità di somma prodotto, quoziente e della composizione. Asintoti verticali, orizzontali e obliqui. Esempi. Teorema degli zeri, sue formulazioni equivalenti e applicazioni alla determinazione del segno delle funzioni continue e all'esistenza di soluzioni di equazioni. Il teorema del valore intermedio con dimostrazione della sua equivalenza al teorema degli zeri. Sua applicazione alla determinazione dell'immagine delle funzioni continue su intervalli. Esempi: uso dei confronti asintotici e del teorema degli zeri per determinare limiti, segno, immagine (e grafico) di $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ e di $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)(x-3)}$; esistenza di radici reali di polinomi di grado dispari.

4.4 Lez. 31 - 32. Lunedí 22/10

Funzioni continue su intervalli compatti, esistenza di massimi e minimi (senza dimostrazione).
Esempi e controesempi. L'immagine di una funzione continua definita su un intervallo.
Continuità della funzione inversa: esempi grafici, ln, exp.
Cenni sul principio di induzione e sulla definizione di successione definita per ricorrenza (Par. 1.5).
Relazione fra limite e composizione di funzioni continue definite su unioni di intervalli:

1. *Cambiamento di variabile per funzioni continue.* Siano f e g due funzioni continue definite su intervalli. Se $f(x) \to \beta$ per $x \to \alpha$ e $g(x) \to \gamma$ per $x \to \beta$, allora, quando α è un punto di accumulazione per $g \circ f$, si ha $\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = \lim_{y\to\beta} g(y) = \gamma$.

2. *Passaggio al limite per funzioni continue.* Siano f e g due funzioni reali di variabile reale. Se $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ per $x \to \alpha$ e g è continua in l, allora, quando α è un punto di accumulazione per $g \circ f$, si ha $\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to\alpha} f(x)\right) = g(l)$.

4.5 Lez. 33. Giovedí 25/10

Dimostrazione del teorema degli zeri mediante il metodo di bisezione. Esercizi.

Esercizi di ricapitolazione.

1. Fare gli esercizi del testo sulla continuità.

2. Fare gli esercizi sulla continuità della mia pagina web.

3. Fare i test sulla continuità della mia pagina web

4. Verificare che la funzione di Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ è discontinua in ogni punto di $\mathbb{R}$.

5. Continuità delle funzioni definite a tratti: grafico e continuità al variare di $k \in \mathbb{R}$ delle funzioni
$$x \mapsto \begin{cases} \arctan(x+1) + k & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) + k & \text{se } x > 0 \\ x^2 + k & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

6. Usando le equivalenze asintotiche con gli infiniti e gli infinitesimi di riferimento, determinare il segno e l'esistenza di asintoti delle funzioni $\frac{x^3-2x-1}{x+5}$ e $\frac{x^3-2x+1}{x+5}$

7. Grafico (molto approssimato) ed esistenza di asintoti di $\sin(x)/x$
8. Disegnare i grafici delle funzioni $x \mapsto \ln(|x|)$, $x \mapsto |\tan(x)|$, e determinare l'esistenza di asintoti.
9. Determinare graficamente gli intervalli in cui la soluzione dell'equazione $\ln(|x|) = \tan(x)$ è unica, applicare ad uno di essi il metodo di bisezione e determinare quanti passi occorrono per avere la soluzione a meno di $1/100$.
10. La funzione $x \mapsto \frac{x^2-1}{x+1}$, è estendibile per continuità a $x_0 = -1$, con quale valore?
11. La funzione $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ è estendibile per continuità a $x_0 = 0$, con quale valore?
12. Perché la funzione $f(x) = 1/x$, sebbene sia continua, non ha per immagine un intervallo?
13. Provare che se una funzione è continua sull'unione di due (tre, quattro, un numero finito) di intervalli limitati e chiusi, allora ammette massimo e minimo.
14. Usando la continuità, disegnare un grafico qualitativo della funzione $x \mapsto \sin(1/x)$. *Suggerimento.* Si calcoli l'immagine, i punti di massimo e minimo, gli zeri e si osservi che la funzione è dispari, che è positiva per $x > 1/\pi$ (perchè?) e che è decrescente su $[2/\pi, +\infty)$.
15. Considerare la funzione definita da $f(x) := x + e^x$ e verificare, usando la teoria svolta, che è continua. Giustificare inoltre le seguenti affermazioni
    (a) La funzione è strettamente crescente.
    (b) L'equazione $x + e^x = 3$ ammette una soluzione unica.
    (c) L'immagine della funzione è tutto $\mathbb{R}$.
    (d) La funzione ha inversa continua con dominio e immagine uguali a $\mathbb{R}$
16. Determinare dominio, segno ed eventuali asintoti di: $f(x) = \ln(x^3 - 4x^2 + 2x + 1)$.
17. Calcolare zeri, min e max (se esistono) di: $f(x) = |x^3 - 3x^2 - 2x - 6|$.
18. Calcolare per quali valori di k è continua la funzione $f(x) = \begin{cases} \cos(x-k) & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$.
19. Stabilire quali delle funzioni definite da:

    $$f(x) = x - \cos(x),\ 1 - \cos(x),\ \ x/(1+x),\ |x|e^x,\ e^x,\ \cos(x) - e^x,\ x^2 - \ln(\cos(x)).$$

    sono del tipo $o(1)$ per $x \to 0$.
20. Stabilire quali delle funzioni definite da:

    $$x^2,\ x - \cos(x),\ x^3\cos(x),\ x\sin(x) + x^2,\ x/(1+x),\ |x|e^x,\ x^2e^x,\ |x|xe^x.$$

    sono del tipo $o(x)$ per $x \to 0$.
21. Sapendo che f è una funzione con dominio $[-1, 1]$ e immagine $[3, 4]$, quale delle seguenti proposizioni posso affermare?
    (a) f è continua
    (b) f non è continua

   (c) f ha massimo
   (d) f ha minimo

22. Sapendo che f è una funzione con dominio $[-1, 1]$ e immagine $(3, 4]$, quale delle seguenti proposizioni posso affermare?
   (a) f è continua
   (b) f non è continua
   (c) f ha massimo
   (d) f ha minimo

23. Sapendo che f è una funzione con dominio $(-1, 1]$ e immagine $[3, 4]$, quale delle seguenti proposizioni posso affermare?
   (a) f è continua
   (b) f non è continua
   (c) f ha massimo
   (d) f ha minimo

24. Sapendo che f è una funzione con dominio $(-1, 1]$ e immagine $[-3, 4] \cup (5, +\infty)$, quale delle seguenti proposizioni posso affermare?
   (a) f è continua
   (b) f non è continua
   (c) f ha massimo
   (d) f ha minimo

25. Quali delle seguenti affermazioni è corretta per una funzione f definita su un intervallo I?
   (a) $f \in C^0(I)$ è una condizione sufficiente affinché $f(I)$ sia un intervallo
   (b) $f \in C^0(I)$ è una condizione necessaria affinché $f(I)$ sia un intervallo
   (c) $f \in C^0(I)$ e I limitato è una condizione sufficiente affinché $f(I)$ sia un intervallo limitato
   (d) $f \in C^0(I)$ e I limitato è una condizione necessaria affinché $f(I)$ sia un intervallo limitato
   (e) $f \in C^0(I)$ e I limitato e chiuso è una condizione sufficiente affinché $f(I)$ sia un intervallo limitato
   (f) $f \in C^0(I)$ e I limitato e chiuso è una condizione sufficiente affinché f ammetta massimo
   (g) $f \in C^0(I)$ e I limitato e chiuso è una condizione necessaria affinché f ammetta massimo

5 Calcolo differenziale

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 7.1 - 7.10 e 8.5 del testo.

5.1 Lez. 34. Giovedí 25/10

Definizione e notazione di derivata in un punto x_0 del dominio e in un insieme. Funzioni derivabili in un punto come funzioni approssimabili con funzioni lineari. Rapporto incrementale e suo significato geometrico, retta tangente. Derivabilità e continuità. Derivata destra e sinistra, punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale. Esempi: polinomi di primo grado, $x \mapsto |x|$, $\sqrt{(|x|)}$, $\sqrt[3]{x}$, derivata del monomio x^n.

5.2 Lez. 35 - 37. Venerdí 26/10

Funzione derivata, l'insieme $C^1(A)$ delle funzioni con derivata continua su A. Gli insiemi $C^n(A)$, $n \in \mathbb{N}$, e $C^\infty(A)$. Proprietà delle derivate: somma, prodotto, differenza, quoziente, lo spazio vettoriale $C^1(A)$ e linearità della derivata. Derivata della composizione o regola della catena. Derivata della funzione inversa: enunciato del teorema e interpretazione geometrica.
Derivata delle funzioni elementari: $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, sin, cos, exp, ln. Teorema sull'uguaglianza del limite della funzione derivata con il limite del rapporto incrementale (senza dimostrazione), vedi Teorema 7.23 del testo. **Attenzione:** *il testo, se il limite del rapporto incrementale in x_0 è $+\infty$ ($-\infty$), scrive $f'(x_0) = +\infty$ ($-\infty$), pur affermando ovviamente che f non è derivabile in x_0. Noi non faremo mai uso di questa notazione per non ingenerare confusioni. Piu precisamente, se il limite del rapporto incrementale in x_0 è $+\infty$ ($-\infty$), diremo che f' non esiste in x_0.*
Esercizi: calcolo delle derivate delle funzioni $\tan$, $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, x^x.
Le funzioni iperboliche sinh e cosh: definizioni, proprietà, derivate, studio dell'immagine, funzioni inverse e grafico.
Esercizi.

1. Calcolo della derivata di $\sinh,\ \cosh,\ 2^x,\ x^x,\ g(x)^{f(x)},\ \arcsin$
2. Calcolo della derivata di $\arccos,\ \arctan$.
3. Determinare il dominio della funzione definita da $f(x) = (\cos(x))^x$. Determinare la retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(0, f(0))$
4. Usando il teorema della funzione inversa dimostrare che
$$D(e^x),\ \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow D(\ln(x)) = \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^+$$
5. Derivata delle funzioni definite a tratti: calcolare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni appartengono a $C^1(\mathbb{R})$
$$x \mapsto \begin{cases} a + x\ln(x) & x > 0 \\ b\cos(3x^5) & x \le 0 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} a + x\ln(x) & x \ge 1 \\ b\cos(3x^5) & x < 1 \end{cases}$$

5.3 Lez. 38 - 39. Lunedí 29/10

Correzione dello svolgimento sull'esistenza della derivata in $x_0 = 0$ della funzione x^x estesa per continuità a $x_0 = 0$.
Limite del rapporto incrementale e sua relazione col segno dell'incremento. Teorema di Fermat (con dimostrazione). Punti critici (o stazionari). Esistenza e calcolo degli estremi locali e globali di funzioni definite sugli intervalli limitati e chiusi.

Esercizi

1. Provare il seguente risultato, conseguenza del Teorema di Fermat. *I punti "candidati ad essere" estremanti per una funzione f definita su un intervallo J vanno cercati tra le seguenti tre categorie*
   - punti di J non interni (cioè gli estremi di J, se gli appartengono);
   - punti di J in cui la funzione non è derivabile;
   - punti interni a J in cui si annulla la derivata.

Si noti che i precedenti punti sono quelli che rimangono dopo aver scartato i punti interni a J con derivata non nulla. Si noti anche che nessuna delle tre condizioni precedenti ci assicura che un punto sia estremante. Tuttavia, se lo è, almeno una delle tre deve necessariamente essere soddisfatta. Come caso particolare si ha che, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, il teorema di Weierstrass ci assicura che ha massimo e minimo. Per calcolarli, posso usare il teorema di Fermat per determinare i candidati estremanti, cioè i punti di massimo e minimo sono da ricercare fra i punti del seguente insieme

$$X = \{a, b\} \cup \{x \in (a, b) : \nexists f'(x)\} \cup \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$$

Se X contiene un numero finito di punti, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, il massimo e il minimo di f saranno, rispettivamente, il più grande e il più piccolo fra i valori di:

$$f(X) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

2. Data la funzione definita da $f(x) = 2x - x^3$, determinare la retta tangente al grafico di f nei punti corrispondenti a $x_0 = 0, -1, 1$.

3. Studiare le seguenti funzioni in base alla teoria fin qui svolta
$$x \mapsto \sin(1/x), \quad x \sin(1/x), \quad x^2 \sin(1/x),$$

4. Determinare dominio e funzione derivata delle funzioni $x \mapsto x^x, \quad (1 - x^2)^{\sin(x)}$,

5. La funzione abs ha due punti di massimo e uno di minimo nell'intervallo $[-1, 1]$. Quali sono i suoi punti di massimo e minimo sull'intervallo $[-1, 3]$?

6. Determinare massimo e minimo della funzione $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ su J con $J = [-4, 4],\ [0, 7],\ [-4, -2],\ [2, 5]$. È particolarmente istruttivo risolvere il problema sia con il teorema di Fermat che disegnando il grafico.

7. Disegnare il grafico e determinare graficamente massimo e minimo della funzione $x \mapsto ||x^3 + 1| - 3|$ su J con $J = [-2, 2],\ [0, 7],\ [-1/2, 2]$. Riconoscere a quali delle categorie descritte nell'esercizio 1. appartengono i punti di massimo e minimo. Risolvere il problema usando il teorema di Fermat (prescindendo dal grafico disegnato), usando il teorema di derivazione per le funzioni composte e stabilendo quali siano i punti singolari mediante la definizione di derivata.

8. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ massimo e minimo (se esistono) della funzione $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x\,, & x \le 0 \\ 1/(x + 3) + k\,, & x > 0 \end{cases}$. Ci sono ulteriori massimi e minimi relativi?

9. Fra i triangoli isosceli di lato 20 cm, determinare (se esiste) quello di area massima. Ne esiste uno di area minima?

10. Fra i triangoli isosceli di perimetro 20 cm, determinare (se esiste) quello di area massima. Ne esiste uno di area minima?

11. Rispondere ai seguenti quesiti, giustificando le risposte, sulla funzione definita da $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{3x^2 - 9}}$

    a. Determinare il dominio.

    b. La funzione è pari, dispari, periodica?

    c. Determinare i punti in cui la funzione è continua.

d. Spiegare perché, dopo aver risposto ai precedenti quesiti, posso affermare che f ammette massimo e minimo.

e. Determinare i punti in cui f è derivabile e gli eventuali punti singolari (dove è continua ma non derivabile).

f. Determinare, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico nei punti di ascissa $x = -5, \sqrt{3}, 2$.

g. Spiegare, da un punto di vista teorico, come si possono trovare il massimo e il minimo della funzione e calcolarli. Determinare i punti di massimo e di minimo della funzione.

12. Spiegare perche' possiamo affermare che esiste un rettangolo di area massima inscritto in un cerchio di raggio 3. Calcolare tale area.

5.4 Lez. 40 - 41. Lunedí 5/11

Teoremi di Rolle e Lagrange (con dimostrazione) e conseguenze:

- Risultato: *Una funzione continua su* $[a, b]$ *con derivata nulla su* (a, b) *è costante.* Applicazione del risultato alla funzione $f = \arcsin + \arccos$ e alla funzione definita da $x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \arctan(x)$. Esercizio proposto: verificare che la funzione $f = \arctan + \text{arcotan}$ è costante su $\mathbb{R}$ e determinare la costante.

- Monotonia e derivata (con dimostrazione).

5.5 Lez. 42 - 43. Giovedí 8/11

Funzioni convesse (concave): definizione geometrica e analitica, condizioni mediante derivate prime e seconde (senza dimostrazione). Studio del grafico di una funzione. **Esercizi:**

1. Dimostrare che, su $(1, +\infty)$, $\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \arctan(x) - 3\pi/4$, usando il limite per $x \to +\infty$. Grafico della funzione $x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2. Dimostrare che se una funzione è derivabile e convessa su un intervallo I e $x_0 \in I$ è un punto stazionario per f allora x_0 è un punto di minimo per f.

3. Dimostrare che se una funzione è derivabile e concava su un intervallo I e $x_0 \in I$ è un punto stazionario per f allora x_0 è un punto di massimo per f.

4. Calcolare la funzione derivata di $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$.

Esercizi di ricapitolazione.

1. Per quali valori della coppia di parametri $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ le seguenti funzioni appartengono a $C^1(\mathbb{R})$?

$$f : x \mapsto \begin{cases} h + \cos(x) & x > 0 \\ k + x^5 & x \leq 0 \end{cases} \qquad f : x \mapsto \begin{cases} h(x-1)^x & x > 1 \\ k\cos(3x^5) & x \leq 1 \end{cases}$$

2. Disegnare il grafico della funzione $x \mapsto e^{-x^2}$

3. Disegnare il grafico della funzione $x \mapsto he^{-(x-a)^2}$, al variare di $(h, a) \in \mathbb{R}^2$

4. Studio della cubica

5. Disegnare il grafico della funzione $x \mapsto x^x$
6. Determinare fra i rettangoli di area assegnata (perimetro assegnato) quello, se esiste, di perimetro (area) massimo e minimo.

5.6 Venerdí 9/11 ore 9 - 10:30

Esercizi.

5.7 Lez. 44 - 45. Venerdí 9/11

Definizione di primitiva di una funzione su di un intervallo I, come primo esempio di equazione differenziale. Struttura dell'insieme delle primitive (par. 8.5). Esempi e applicazione alla caduta dei gravi.
Esercizi.

5.8 Lez. 46. Lunedí 12/11

Teoremi di de L'Hôpital (senza dimostrazione): enunciato ed esempi (verifica di limiti notevoli, relazione fra funzione derivata e limite del rapporto incrementale).

6 Approssimazione di Taylor

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 7.11 - 7.13 del testo.

6.1 Lez. 47. Lunedí 12/11

Polinomio di Taylor (MacLaurin): definizione, esempi e proprietà algebriche. Teorema di Peano (senza dimostrazione) e suo significato in termini di approssimazione. Riduzione dell'approssimazione di Taylor a quella MacLaurin. Applicazioni ed esercizi.

- Calcolo delle approssimazioni di MacLaurin con resto in forma di Peano delle funzioni $e^x,\ e^{-x},\ \sin(x),\ \cos(x),\ \sinh(x),\ \cosh(x)$
- Calcolo di $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x + x^3}{x^n}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$
- Calcolo dell'approssimazione di MacLaurin della funzione $\sin(x)/x$, estesa per continuità a zero e, conseguentemente di tutte le sue derivate nell'origine.

6.2 Mercoledí 14/11 ore 14 - 17, aula 111 di S.Marta

Correzione di esercizi di preparazione alla prova intercorso.

6.3 Lez. 48 - 49. Giovedí 15/11

Uso dell'approssimazione di Taylor per la determinazione degli estremi locali e della convessità e concavità locale. Calcolo dei polinomi di MacLaurin di funzioni, a partire da polinomi noti, col metodo della sostituzione e le proprietà algebriche:

1. Calcolo, a partire dall'approssimazione di MacLaurin di sin e cos, dell'approssimazione di Taylor di sin e cos centrata in un qualsiasi $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. Verificare che $T'_{n,f,x_0} = T_{n-1,f',x_0}$, cioè *il polinomio di Taylor di ordine* n *centrato in* x_0 *di una funzione* f *è una primitiva del polinomio di Taylor di ordine* $n-1$ *centrato in* x_0 *della funzione* f' (verifica per esercizio, con suggerimenti).

3. Calcolo dei polinomi di MacLaurin di $1/(1+x)$, $1/(1-x)$, $1/(1+x^2)$, $\ln(1+x)$; $\arctan(x)$ (assegnato insieme al calcolo delle derivate in zero).

4. Calcolo del limite di alcune forme indeterminate.

6.4 Venerdí 16/11

Prova intercorso: ore 10, possono partecipare gli studenti che hanno superato gli OFA e si sono iscritti alla prova mediante il servizio di iscrizione alle prove d'esame di Ateneo.

6.5 Lez. 50 - 51. Lunedí 19/11

Coefficienti binomiali e calcolo del binomio di Newton mediante l'approssimazione di MacLaurin di $(1+x)^n$. Approssimazione di $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Definizione di parte principale:
Se esistono $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$, tali che $f(x) \sim \rho|x-x_0|^\alpha$ per $x \to x_0^\pm$, allora $\rho|x-x_0|^\alpha$ si dice la **parte principale** *di f per $x \to x_0^\pm$.*
Se esistono $\rho, \alpha \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$, tali che $f(x) \sim \rho|1/x|^\alpha$ per $x \to \pm\infty$, allora $\rho|1/x|^\alpha$ si dice la **parte principale** *di f per $x \to \pm\infty$.*
Elenco delle approssimazioni di MacLaurin da conoscere:

$$\exp(x),\ \sin(x),\ \cos(x),\ \sinh(x),\ \cosh(x),\ \ln(1+x),\ (1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Esercizi sull'approssimazione di Taylor con l'errore in forma di Peano

1. Calcolo delle derivate in $x_0 = 0$ delle funzioni $1/(1-x^2)$, $1/(1+x^2)$, $(1-\cos(x^5))/x^3$ mediante il loro polinomio di MacLaurin. In particolare calcolare le derivate di ordine 100 e 50.

2. Determinare il polinomio di MacLaurin di ordine 2 della funzione $\cos(\pi + x)$ e usarlo per determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = \pi^2$ di funzione $f(x) = \cos(\sqrt{x})$. Calcolare quindi, al variare di $n \in \mathbb{N}$, se esiste, $\lim\limits_{x\to\pi^2} \dfrac{f(x)+1}{x^n}$.

3. Calcolare, se esistono i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2) - \ln(1+x^2)}{x^4 + x^7}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sin(x) + \frac{1}{2}x^2 - 1}{3x^3 + 8x^4}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} + 1 - 2\cos(x)}{x + 11x + 3x^8}$.

4. Calcolare $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} + \dfrac{x^2}{1+x} \right)$.

   Svolgimento.

   $\sqrt{x^2+2x} + \dfrac{x^2}{1+x} = |x| \left(\sqrt{1+2/x} - (1+1/x)^{-1} \right) = |x| \left(1 + 1/x - 1 + 1/x + o(1/x^2)\right)$.

   Quindi: $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} + \dfrac{x^2}{1+x} \right) = \lim\limits_{x\to -\infty} 2|x|/x = -2$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(\sin(x^3)))}{x^6}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos(x)}{3(\sin(x))^2 + \sin(4x^2)}$.

7. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sin(x^2-5x+6)}{1-\cos(x-3)}$.

8. Fare tutti gli esempi ed esercizi del libro sull'argomento.

6.6 Lez. 52 - 53. Giovedí 22/11

Approssimazione di Taylor con resto in forma di Lagrange.
Uso dell'approssimazione di Taylor con resto in forma di Lagrange (in particolare del teorema di Lagrange) per stimare i valori delle funzioni. Esercizi.

6.7 Venerdí 23/11, ore 9:15 - 10:45

Correzione degli esercizi della prova intercorso

7 Integrale di Riemann

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 8.1 - 8.7 del testo.

7.1 Lez. 54 - 55. Venerdí 23/11

Il concetto di area di figure piane. Partizioni (suddivisioni) di un intervallo limitato, plurirettangoli iscritti e circoscritti, disuguglianze legate alle partizioni. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale di Riemann di una funzione limitata su un intervallo limitato. Relazione fra integrale e area, il caso di funzioni positive (negative) sull'intervallo. Esempi: funzioni costanti, funzione di Dirichlet, calcolo di integrali mediante aree.

7.2 Lez. 56 - 57. Lunedí 26/11

Risultato senza dimostrazione: l'integrale di una funzione integrabile secondo Riemann non cambia se si cambiano un **numero finito** di valori. Classi di funzioni integrabili sull'intervallo $[a,b]$ (senza dimostrazione): $C^0([a,b])$, funzioni monotone su $[a,b]$, funzioni limitate su $[a,b]$ e continue tranne un insieme finito di punti. Esempio: la funzione $\sin(1/x)$ sull'intervallo $[0,1]$ estesa con qualunque valore a 0 (e quindi anche non estesa).
Proprietà dell'integrale (senza dimostrazione) e loro significato geometrico e algebrico:

- Linearità dell'integrale: l'insieme $\mathcal{R}(a,b)$ delle funzioni integrabili su $[a,b]$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione $f\in\mathcal{R}(a,b)\mapsto \int_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$ è lineare.
- Additività rispetto all'intervallo.
- Monotonia
- Relazioni fra gli Integrali di f, f^+, f^-, $|f|$ (proprietà di continuità). Applicazione della proprietà allo studio della relazione fra integrale e area.

Integrale orientato: definizione e relazione fra integrale e area.
Esercizi

1. Date $f_1 : x\mapsto \sqrt{r^2-x^2}$ e $f_2 : x\mapsto \begin{cases} x & \text{se } x\le 0 \\ \sqrt{r^2-x^2} & \text{se } x>0 \end{cases}$, calcolare:
   $\int_{[-r,r]} f_1(x)dx$ e $\int_{[-r,r]} f_2(x)dx$.

2. Data $f : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ -\sqrt{2x-x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, calcolare $\int_{[-2,2]} f(x)dx$ (risultato: $-\pi/2$). Inoltre determinare l'area della parte di piano delimitata dalla funzione, l'asse delle x e le rette $x = \pm 2$. Descrivere l'area della parte di piano delimitata dalla funzione, l'asse delle x e le rette $x = \pm 2$, usando solo somme di integrali orientati.

3. Calcolare $\int_{\pi}^{-\pi} \sin(x)dx$ (risultato: 0). Cosa posso dire dell'area della parte di piano compresa fra l'asse x, il grafico del seno e le rette verticali $x = \pm\pi$?

7.3 Giovedí 29/11, ore 13 - 13:45

Correzione di alcuni test a risposta multipla della prova intercorso.

7.4 Lez. 58 - 59. Giovedí 29/11

Per esercizio: Determinare quali delle proprietà dell'integrale di Riemann si estendono all'integrale orientato, in particolare si verifichi che se $f \in \mathcal{R}(I)$ e $a, b, c \in I$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema della media integrale, con dimostrazione.
Funzioni integrali: definizione e loro continuità con dimostrazione. Il testo considera solo la continuità di funzioni integrali relative ad una funzione $f \in \mathcal{R}(a, b)$, noi estendiamo il risultato alle funzioni *localmente integrabili su un intervallo* I, dove I è un intervallo qualsiasi anche illimitato, cioè alle funzioni che soddisfano alla seguente proprietà su I: *Per ogni intervallo* $[a, b] \subset I$, *la funzione* f *appartiene a* $\mathcal{R}(a, b)$.
Enunciato e dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo per funzioni continue su un qualsiasi intervallo I.

Teorema. Sia I un intervallo, sia $f \in C^0(I)$ e sia $c \in I$. La funzione $F_c : I \to \mathbb{R}$ definita da $F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$ è una primitiva di f su I. Ne segue che $F_c \in C^1(I)$. Inoltre si ha che, se $d \in I$, allora $F_d = F_c + \int_d^c f(x)dx$

Significato ed esempi.
Esercizi

1. Siano f_1, f_2 le funzioni definite nella precedente lezione, calcolare $\int_0^{-r} f_1(x)dx$, e $\int_{-r}^x f_2(t)\,dt$, $\forall x \leq 0$. Inoltre verificare il teorema della media sui precedenti integrali, valutando il punto dell'intervallo in cui la funzione assume il valore della media integrale.

2. Verificare che se f è una funzione dispari allora $\int_a^{-a} f(x)dx = 0$.

7.5 Lez. 60 - 62. Venerdí 30/11

Enunciato del teorema fondamentale del calcolo del testo, confronto fra i due enunciati. Esempio: applicazione dei due risultati alla funzione f considerata nelle precedenti lezioni. Esercizi sulle funzioni integrali e su funzioni ottenute da composizioni con funzioni integrali. Formula fondamentale del calcolo integrale (Corollario 8.15 del testo). Calcolo di alcuni integrali immediati, calcolo di aree.
Leggere la tabella delle derivate, come tabella di primitive.

Esercizi sulle funzioni integrali

1. Calcolare il dominio e disegnare il grafico delle funzioni definite da: $F : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$, $G : x \mapsto \int_{-1}^x \frac{1}{t} dt$. Inoltre, usando la relazione fra integrale e area e la definizione di integrale orientato, provare che $G(x) = F(-x)$.
   Suggerimento: osservare che $t \mapsto 1/t$ è dispari e distinguere i casi $x < -1$ e $x \in (-1, 0)$.

2. Data la funzione $f : x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, considerare la funzione $F : x \in [-r, r] \mapsto \int_0^x f(t)dt$. Usando il teorema fondamentale del calcolo disegnare il grafico di F e calcolarne il massimo e il minimo.
   Detta $A(s)$ l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x, l'asse y e la retta $x = s$, disegnare il grafico della funzione A e descrivere la relazione fra la funzione F e la funzione A. Studiare la classe di derivabilità sia di F che di A.

3. Data la funzione $f : x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{2x - x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, disegnare il grafico della funzione F definita da $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$. Inoltre, usando la relazione fra integrale ed area calcolare $F(2)$ e $F(-2)$.

4. Disegnare il grafico della funzione integrale relativa all'origine della funzione parte intera. La funzione parte intera è definita da $x \mapsto n$ se $x \in [n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Fare, per quanto possibile, il grafico qualitativo della funzione $F : x \mapsto \int_1^x t \ln(t)dt$. In particolare mostrare che il suo dominio è $[0, +\infty)$, che ha un minimo globale in $x = 1$, che ha tangente orizzontale in $x = 0$ e che $\lim_{x\to+\infty} F(x)dx = +\infty$ (si usi la relazione fra integrale e area e le proprietà dei limiti).

6. Fare, per quanto possibile, il grafico qualitativo della funzione $G : x \mapsto \int_1^{1/x^2} \ln(t)dt$.
   Suggerimento. Detta $F(x) = \int_1^x \ln(t)\, dt$, si scriva G tramite F e se ne studi dominio e derivata mediante la composizione di funzioni. Usando il cambiamento di variabile $y = 1/x^2$, la relazione fra integrale e area e le proprietà dei limiti, si dimostri che $\lim_{x\to 0} G(x)dx = +\infty$. La funzione G ha un asintoto orizzontale, ma ancora non si hanno gli elementi per provarlo, si può comunque provare che la funzione ha limite per $x \to +\infty$, usando i risultati sulla crescenza (decrescenza) della composizione e le proprietà dei limiti.

7. Usando il teorema sulla derivazione della composizione di funzioni, si determini, ove possibile, la derivata della funzione $G : x \mapsto \int_0^{\frac{1}{|x|+1}} e^{t^2} dt$ e se ne tracci un grafico qualitativo. Si mostri anche, usando il Teorema della media integrale, che $\lim_{x\to+\infty} G(x)dx = 0$. Si può arrivare allo stesso risultato anche con un cambiamento di variabile (quale?)

7.6 Lez. 63 - 64. Lunedí 3/12

Integrali impropri e integrabilità in senso improprio come limiti di funzioni integrali. Integrale improprio degli infinitesimi e infiniti di riferimento $\frac{1}{|x-x_0|^r}$ e loro interpretazione geometrica in termini di aree. Assoluta integrabilità in senso improprio e relazione fra integrabilità e assoluta integrabilità in senso improprio. Criteri di integrabilità in senso improprio per funzioni definitivamente positive (negative): criterio del confronto, dell'equivalenza asintotica e criterio del confronto per funzioni $f(x) = o(g(x))$.

Esercizi

1. Integrale improprio della funzione gaussiana $x \mapsto e^{-x^2}$ su $\mathbb{R}$.

2. Determinare l'esistenza dei seguenti integrali impropri con lo studio asintotico della funzione integranda

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx,\ \int_0^1 \frac{x}{1-x^3}\,dx,$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln(x)}{(1-x)^2}\,dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x-1}\,dx.$$

3. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ l'integrabilitá in senso improprio di

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|^\beta}{x^2}\,dx$$

7.7 Lez. 65 - 66. Giovedí 6/12

Integrale indefinito. *Contrariamente al testo, col simbolo $\int f(x)\,dx$, noi non indicheremo né una primitiva né l'insieme delle primitive, ma una funzione la cui derivata (su un qualche intervallo) è f*; in altre parole indefinito è l'intervallo su cui si considera la primitiva. Questo perché la primitiva è strettamente legata all'intervallo e l'utilità del simbolo risiede nel facilitare i calcoli, senza ogni volta precisare l'intervallo su cui consideriamo la primitiva. Così scriveremo $\int(1/x)dx = \ln(|x|)$, tenendo però ben presente che ci sono primitive distinte della funzione $1/x$ sulle due semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.
Integrali per parti: uso del differenziale come formula mnemonica. Esempi.

7.8 Lez. 67 - 69. Venerdí 7/12

Integrali per sostituzione: uso del differenziale come formula mnemonica. Primi esempi. Integrale indefinito delle funzioni razionali; descrizione completa di quelle con denominatore di grado uno o due, cenni sulle altre. Esercizi.

Esercizi di ricapitolazione

1. $\displaystyle\int_0^1 x^a \ln(x)\,dx\ , \quad a \in \mathbb{R}$

2. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ stabilire il carattere dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a \ln(x)\,dx$

3. Calcolo dell'area di parte del cerchio mediante la funzione integrale

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-t^2}dt$$

4. Calcolare i seguenti integrali orientati usando l'integrazione per parti e per sostituzione per l'integrale di Riemann

$$\int_1^0 x(x-1)\sin(4\pi x)\,dx\ ,\ \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx\ ,\ \int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

5. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ si possono calcolare i seguenti integrali orientati e calcolarli
$$\int_a^b \ln(x)\,dx\,,\ \int_a^b \ln(|x|)\,dx\,,\ \int_a^b \arctan(x)\,dx\,,\ \int_a^b \frac{2x+1}{x^2-1}\,dx\,,\ \int_a^b \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

6. Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dal grafico della funzione $y = \arcsin(x)$ e la retta $y = \frac{\pi}{2}x$.

7. Calcolare $\int_a^b f(x)dx$, dove f è una delle seguenti funzioni e a, b sono coppie di numeri naturali scelte dallo studente (fra quelle possibili).
$$x \mapsto \frac{3x^3+x+1}{x+1}\,, \quad \frac{x}{hx^2+1}\,,\ h \in \mathbb{R}\,, \quad \frac{1}{hx^2+1}\,,\ h \in \mathbb{R}\,,$$
$$x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-1}\,, \quad \frac{x+1}{x^2+x+1}\,, \quad \frac{1}{x^2+x+1}\,, \quad \frac{x+3}{(x+1)^2}.$$

8. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ l'integrabilitá in senso improprio di
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}\,dx.$$

9. Studiare $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ e, di conseguenza, la funzione
$$x \mapsto \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_0}^x e^{-\frac{(t-x_0)^2}{2\sigma^2}}\,dt,\ \sigma > 0,\ x_0 \in \mathbb{R},$$
calcolandone gli asintoti orizzontali, sapendo che $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e usando la sostituzione $y = \frac{t-x_0}{\sqrt{2\pi}}$. Fare i grafici e confrontarli.

10. Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = x\sin(x)$, $y = -x\cos(x)$ e contenuta nella striscia delimitata dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$.

11. Calcolare l'area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = \arctan(x)$ ed $y = \frac{\pi}{4}x$.

12. Fare uno studio qualitativo di $G:\ x \mapsto \int_0^{\cos(x)} \arcsin(t)\,dt$: dominio, derivata, grafico (qualitativo).

13. Calcolare esplicitamente la $G(x)$ dell'esercizio precedente svolgendo l'integrale.

14. Data
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{x^3} & \text{se } x \le -2 \\ \arctan(x) & \text{se } x > -2 \end{cases},$$
studiare $F(x) = \int_{-7}^x f(t)\,dt$, facendo il grafico di f e poi quello di F; trovare anche gli asintoti di F, e descrivere $F(x)$ in termini di aree, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

15. Calcolare esplicitamente la $F(x)$ dell'esercizio precedente svolgendo l'integrale, in particolare calcolare $F(-2)$ e $F(1)$.

16. Data $f(x) = \frac{1+x^5}{\ln(x)}$, studiare $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,dt$.

17. Data $f : [0;4] \mapsto \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 5 & \text{se } x = 1, x = 4 \\ \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} & \text{se } 1 < x \le 4 \end{cases},$$
calcolare $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; in particolare calcolare $F(4)$.

18. Studiare l'integrabilità in senso improprio di
$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} \frac{1}{|x-x_0|^r}\,dx\,,\ a>0,\quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{|x-x_0|^r}\,dx\,,\ a>x_0,\quad \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{|x-x_0|^r}\,dx\,,\ a<x_0$$
con la sostituzione $x - x_0 = h$.

19. Studiare la funzione $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{t^3+1}{t^2 \cdot \sqrt[3]{7-t}}\,dt$

7.9 Lez. 70 - 71. Lunedí 10/12

Area della parte di piano compresa fra i grafici di due funzioni. Esempi ed esercizi: area della parte limitata di piano delimitata dal grafico della funzione $y = \arcsin(x)$ e la retta $y = \pi x/2$, area della parte limitata di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = x\sin(x)$, $y = -x\cos(x)$ e contenuta nella striscia delimitata dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$. Alcune sostituzioni. Esempi: area della parte limitata di piano delimitata dal grafico della funzione $y = \sqrt{1-x^2}$ e la retta $y = x - 1$, $\int \sqrt{b^2 - a^2x^2}$ e applicazione al calcolo dell'area dell'ellisse, $\int \sqrt{b^2 + a^2x^2}$ e $\int \sqrt{a^2x^2 - b^2}$.

7.10 Lez. 72. Giovedí 13/12, la lezione iniziera' alle ore 13:30

Esercizi. Esercizio parzialmente svolto: studiare la funzione integrale
$F : x \mapsto \int_{-2}^{x} (1 + 1/t)^t dt$.

1. F è definita in $(-\infty, -1)$, quindi serve lo studio della funzione $f : x \mapsto (x + 1/x)^x$ sulla semiretta $(-\infty, -1)$. Gli studenti sono invitati a ripetere i calcoli sulla semiretta $(0, +\infty)$ e studiare la funzione integrale $x \mapsto \int_2^x (1 + 1/t)^t dt$.

2. Equivalenza asintotica per $x \to -\infty$.
$$f(x) = e^{x\ln(1+1/x)} = e^{1-1/(2x)+o(1/x)} = e(1 - 1/(2x) + o(1/x))$$

3. Equivalenza asintotica per $x \to -1^-$, posto $x = -1 - h$, $h > 0$.
$$f(x) = e^{x\ln(1+1/x)} = e^{(-1-h)(\ln(h)-\ln(1+h))} = e^{-\ln(h)+o(h)} = \frac{1}{h}(1 + o(h))$$

4. $f'(x) = f(x)(\ln(1 + 1/x) - 1/(1 + x))$. Posto $g(x) = \ln(1 + 1/x) - 1/(1 + x)$, si ha che $g(x) \sim 1/(x^2 + x)$, $x \to -\infty$ e che $g'(x) = -1/(x(x + 1)^2)$. Ne segue che g è crescente e positiva su $(-\infty, -1)$ e quindi che f' è positiva e f crescente nello stesso intervallo.

5. Possiamo quindi affermare che F è crescente e convessa. Usando il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri, per le equivalenze asintotiche determinate nei punti 2,3, si può affermare che F non ha asintoto orizzontale ed ha asintoto verticale.
6. Si può anche studiare l'esistenza di asintoto obliquo, cioè se esistono $m, q \in \mathbb{R}$, tali che $F(x) = mx + q + o(1),\ x \to -\infty$, ragionando nel seguente modo.
   (a) È facile vedere che $m = e$.
   (b) Il calcolo di $\lim_{x\to-\infty} F(x) - ex$, equivale a studiare la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_{-2}^{-\infty} (f(t) - e)\, dt$. L'equivalenza asintotica studiata al punto 2 implica che non esiste asintoto obliquo.

8 Serie numeriche

Gli argomenti di questa sezione sono svolti nei paragrafi 4.7 - 4.9 e 9.1 del testo.

8.1 Lez. 7. Giovedí 13/12

Serie numeriche: la successione delle somme parziali, definizione di serie convergenti, divergenti, irregolari, somma della serie. Carattere della serie geometrica. Esercizio: verificacare che $0, \bar{9} = 1$. Proprietà elementari delle serie. Condizione necessaria per la convergenza di una serie.

8.2 Lez. 74 - 76. Venerdí 14/12

Serie a termini positivi: serie armonica e armonica generalizzata, con dimostrazione usando la convergenza o divergenza dell'integrale improprio. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: criterio del confronto e del confronto asintotico, criterio del rapporto e della radice. Assoluta convergenza di una serie. Relazione fra convergenza assoluta e convergenza. Esempio: serie di McLaurin di e^x e verifica (mediante il resto in forma di Lagrange) che $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Esercizi:
1. Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{i\geq 1} \sin(1/n^2)\sqrt{n + n^2}, \quad \sum_{i\geq 1} \sin(1/n^2)\sqrt{n + \sqrt{n}}$$

2. Studiare il carattere delle seguenti serie al variare di $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n\geq 0} nx^n, \quad \sum_{n\geq 0} x^n/n, \quad \sum_{n\geq 0} x^n/n^2, \quad \sum_{n\geq 1} (2^x - 3)^n,$$

8.3 Lez. 77 - 78. Lunedí 17/12, la lezione iniziera' alle 14:30

Serie a segni alterni: criterio di Liebniz. Esercizi: convergenza assoluta di alcune serie di Mclaurin.

9 Equazioni Differenziali Ordinarie

Gli argomenti di questa sezione sono nei paragrafi 17.1 - 17.4 del testo. L'impostazione sarà leggermente diversa e non tutti gli argomenti verranno trattati; per comodità dello studente nella mia pagina web metterò degli appunti sull'argomento.

9.1 Lez. 79 - 80. Giovedí 20/12

Equazioni differenziali ordinarie (EDO) in forma normale: definizione di soluzione e soluzione massimale. EDO lineari e problema di Cauchy. Struttura delle soluzioni delle EDO lineari omogenee e non omogenee.

9.2 Lez. 81 - 83 Venerdí 21/12

EDO lineari del primo ordine. EDO lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: soluzione generale delle omogenee, moto armonico forzato, risonanza.
Esercizi.

1. Verificare che le funzioni definite da $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = -1/x^2$ sono soluzioni sulla semiretta $(0, +\infty)$ dell'equazione lineare omogenea $y'' + \dfrac{2}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y = 0$ e determinarne la soluzione generale. Determinare inoltre la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy: $\begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

2. Verificare che le funzioni definite da $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x^2 \ln(x)$ sono soluzioni sulla semiretta $(0, +\infty)$ dell'equazione lineare omogenea
$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0 \tag{1}$$
e determinarne la soluzione generale. Determinare inoltre la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy: $\begin{cases} y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

3. La funzione definita da $f(x) = -1/x^2$ è soluzione dell'equazione 1? La funzione definita da $g(x) = \ln(x)$ è soluzione dell'equazione 1? Giustificare le risposte.

4. Supponiamo che lo spostamento di una molla in un mezzo viscoso sia determinato dall'equazione $\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 0$ e che al tempo $t = 0$ si abbia $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 3$.
   a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo e disegnarne il grafico.
   b. Determinare, se esiste, il limite dello spostamento quando il tempo tende a $+\infty$
   c. Determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui lo spostamento della molla che al tempo $t = 0$ soddisfa a $y(0) = a$, $\dot{y}(0) = b$ decresce senza oscillare.

9.3 Giovedí 3/01/13 ore 14:30 - 16:30

Esercizi

9.4 Martedí 8/01/13 ore 14:30 - 16:30

Esercizi