1 Esercizi sull'integrale di Riemann

1.1 Integrali impropri

1. Determinare il carattere dei seguenti integrali impropri

$$\int_0^{\pm\infty} \frac{(\cos(x)-1)^2}{e^x}dx, \quad \int_0^{\pm\infty} \frac{xe^x}{x^{104}+x^3+7}dx, \quad \int_0^{\pm\infty} \frac{x^{203}}{e^x}dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^x}{x^{104}+71}dx$$

2. Determinare quali dei seguenti integrali sono impropri e determinarne il carattere

$$\int_0^1 \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2}dx, \quad \int_1^{-\infty} \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2}dx, \quad \int_0^1 \frac{\exp(x)-1}{(\cos(x)-1)}dx$$

$$\int_0^1 \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^{9/4}}dx, \quad \int_{-1}^0 \frac{\sqrt[4]{1-\cos(x)}}{x^2}dx, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{1-\cos(x)}}{x}dx$$

3. Usando il teorema di De l'Hopital, si calcoli al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{|x|^\alpha} \int_0^x t\ln(|t|)dt$$

1.2 Funzioni integrali

1. Disegnare il grafico della funzione $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt$.
2. Disegnare il grafico delle funzioni

$$t \mapsto \int_1^t \frac{e^{(x-2)}}{x^4}dx, \quad t \mapsto \int_{-5}^t \frac{e^{(x-2)}}{x^4}dx$$

determinando anche eventuali asintoti orizzontali e verticali.

3. Disegnare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il grafico della funzione

$$x \mapsto \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^\alpha}dt$$

determinando anche eventuali asintoti orizzontali e verticali.

4. Rispondere alle seguenti domande sulla funzione F definita da

$$F(x) = \int_{1/2}^x \frac{1+t^5}{\ln(t)}dt.$$

   a. Spiegare perchè F è definita in 0.
   b. Senza calcolare l'integrale, che non può essere espresso tramite funzioni elementari, determinare dominio, crescenza e decrescenza, covessità e concavità, eventuali punti di massimo e minimo globale (assoluto) o locale (relativo) di F.
   c. Determinare l'esistenza di asintoti per F.
   d. Disegnare il grafico di F.

5. Determinare dominio e derivata delle funzioni: $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\cos(x)} \arcsin(t)\,dt$ e $x \mapsto \int_{x(4-x)}^1 \arcsin(t)\,dt$.

6. Considerare la funzione
$$H(x) = \int_1^{1/x} \exp(-t^2)dt.$$
Si scriva H come composizione di una opportuna funzione integrale F e la funzione $x \mapsto 1/x$ e, usando tale scrittura, rispondere alle seguenti domande.
   (a) Spiegare perché il dominio di H è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   (b) Verificare che H ha un asintoto orizzontale destro e sinistro (usare il cambiamento di variabile $y = 1/x$ nel limite)
   (c) Usare il cambiamento di variabile $y = 1/x$, per verificare che la funzione può essere estesa a 0 come funzione continua a destra e che tale funzione ha una discontinuità di salto (usare i risultati dell'esercizio 1.2.1).
   (d) Usando il teorema fondamentale del calcolo e la derivata della funzione composta, determinare $H'(x)$ e disegnarne il grafico, escludendo il comportamento nell'origine.
   (e) Disegnare il grafico di H

1.3 Relazione fra integrale ed area

1. Spiegare la relazione fra integrale orientato e area. Determinare l'area della regione di piano compresa fra l'asse x il grafico della funzione $f(x) = x\cos(2x)$ e le rette $x = 0, \quad x = \dfrac{3\pi}{4}$.

2. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 3$

3. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali di $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+5}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra l'asse x, il grafico della funzione e le rette verticali di equazioni $x = 0$ e $x = 2$

4. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = 4 - x^2$, e $y = (x-1)^2$.

5. Calcolare il segno della funzione $f(x) = x\cos(x/2)$, al variare di $x \in \mathbb{R}$. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione l'asse x e le rette verticali $x = -\pi/3$ e $x = \pi/2$

6. Disegnare i grafici delle funzioni $f(x) = xe^{x-2}$ e $f(x) = e^{-4}x$. Calcolare l'area della parte limitata di piano compresa tra i grafici

7. Disegnare e calcolare l'area della parte limitata di piano compresa i grafici delle funzioni $y = \sqrt{2-x^2}$ e $y = 1$.

1.4 Ricapitolazione

1. Fare tutti gli esercizi sugli integrali dei compiti d'esame che si trovano sulle mie pagine web relative agli anni accademici precedenti.

2. Disegnare il grafico di
$$f : x \mapsto \begin{cases} x\exp(-x) & \text{se} \quad x > 0 \\ x & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Spiegare perchè f ammette primitive.

(b) Quante volte sono derivabili le sue primitive?

(c) Disegnare il grafico della primitiva F di f tale che $F(-1) = 0$ senza calcolarla, in particolare specificare il dominio e discutere l'esistenza di massimi e minimi relativi ed assoluti e di asintoti verticali e orizzontali.

(d) Calcolare la primitiva F di f definita nel precedente punto, descrivendo al variare di $x \in \mathbb{R}$ il significato di $F(x)$ in termini di aree.

(e) Indicata con $A(t)$ l'area della parte limitata di piano compresa fra il frafico di f, l'asse x e le rette $x = \pm t$, disegnare il grafico della funzione $x \to A(x)$ e calcolare $A(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. Studiare la funzione: $t \mapsto \int_1^t \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2} dx$, in particolare spiegare perché tale funzione è $C^\infty(\mathbb{R})$ ed ammette asintoti orizzontali (usare opportune limitazioni e la monotonia dell'integrale).

4. Spiegare perchè la funzione $H : t \mapsto \int_0^t \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^2} dx$ è $C^\infty(\mathbb{R})$ ed usare il metodo di integrazione per sostituzione (o il significato geometrico dell'integrale) per dimostrare che tale funzione è pari. Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0} H(x)/x^n$ al variare di $n \in \mathbb{N}$

5. Studiare le due funzioni

$$t \mapsto \int_1^t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx, \quad t \mapsto \int_{-2}^t \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx.$$

In particolare si cerchi di determininare l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali.

6. Disegnare il grafico di

$$t \mapsto \int_1^t \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx, \quad t \mapsto \int_1^t \exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx, \quad t \mapsto \int_1^t \exp\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

7. Sia f la funzione definita da $f(x) = \int_0^x \ln(\cos(t)) dt$. Dire quali delle seguenti affermazioni è giusta, spiegarne il perché e poi disegnare il grafico di f.
Il dominio di f è $(-\pi/2, \pi/2)$.
Il dominio di f è $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$.
Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
f è infinitesima per $x \to 0$.
f ha parte principale strettamente positiva per $x \to 0$.
$\lim_{x\to 0} f(x)/x^n$ non esiste se $n > 3$.
$\lim_{x\to 0} f(x)/x^n$ non esiste se n è un numero naturale pari maggiore di 3.
$\lim_{x\to 0} f(x)/x^n = -x^3/6$ se $n = 3$.
f è infinitesima di ordine 2 per $x \to 0$.
f è infinitesima senza ordine per $x \to 0$.
f è infinitesima di ordine 1 per $x \to 0$.
f è infinitesima di ordine 3 per $x \to 0$.
f ha parte principale uguale a $-x^2/2$ per $x \to 0$.
f ha parte principale uguale a $x^2/2$ per $x \to 0$.
f ha parte principale uguale a $-x^3/3$ per $x \to 0$.
f non cambia segno nel suo dominio.
f è dispari.
f è pari.
f ha un flesso a tangente orizzontale nell'origine.

8. Sia G la funzione definita da $G(x) = \int_0^{\sin(x)} \exp(-t^2)dt$. Dire quali delle seguenti affermazioni è giusta e spiegarne il perché.
   Il dominio di G è $(-\pi/2, \pi/2)$.
   Il dominio di G è $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$.
   Il dominio di G è $\mathbb{R}$.
   G è dispari.
   G è pari.
   G è periodica.
   $G'(x) = \exp(-x^2)$.
   $G'(x) = -2x\exp(-x^2)\sin(x)$.
   $G'(x) = \cos(x)\exp(-(\sin(x))^2)$.
   $G'(x) = \cos(x)\exp(-x^2)$.
   $\lim_{x\to 0} G(x)/x^n$ non non esiste se $n > 3$.
   $\lim_{x\to 0} G(x)/x = 1$.
   $\lim_{x\to 0} G(x)/x^3 = +\infty$.
   $\lim_{x\to 0} G(x)/x^2$ non esiste.
   G ha un flesso a tangente orizzontale nell'origine.

9. Sia $G(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \ln(2 - t^2)dt$. Dire quali delle seguenti affermazioni è giusta e spiegarne il perchè.
   Il dominio di G è $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
   Il dominio di G è $(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2})$.
   Il dominio di G è $\mathbb{R}$.
   G è dispari.
   G è pari.
   G è periodica.
   $G'(x) = 2\ln(2 - x^4)$.
   $G'(x) \equiv 0$.
   $G'(x) = 4x\ln(2 - x^4)$.
   $G'(x) = 2x\ln(2 - x^4)$.
   $G'(x) = 4x\ln(2 - x^2)$.
   G è infinitesima di ordine 2 per $x \to 0$.
   G è infinitesima senza ordine per $x \to 0$.
   G è infinitesima di ordine 1 per $x \to 0$.
   $\lim_{x\to 0} G(x)/x^n$ non esiste se $n > 1$.
   $\lim_{x\to 0} G(x)/x = 1$.
   $\lim_{x\to 0} G(x)/x^3 = +\infty$.
   $\lim_{x\to 0} G(x)/x^2 = 2\ln(2)$.
   G ha un flesso a tangente orizzontale nell'origine.
   G ha un minimo locale nell'origine.
   G ha un massimo locale nell'origine.
   G ha massimo globale.
   G ha due punti di minimo globale.
   G ha due punti massimo globale.