1 Esercizi sul calcolo differenziale

1. Considerare le funzioni degli esercizi sulla continuità, stabilire in quali insiemi sono derivabili e determinarne la derivata.

2. Determinare, per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni risultano appartenere a $C^1(\mathbb{R})$ e a $C^2(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} 3x+5 & x \leq 3 \\ x+a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x/a+5 & x \leq 3 \\ x+a & x > 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos(ax) & x \leq 0 \\ \sin(x+a) & x > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sqrt{ax} & x \leq 0 \\ -\sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$$

   Per i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui le funzioni risultano continue ma non derivabili in $x = x_0$, determinare se x_0 e' un punto angoloso.

3. Determinare, per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni risultano appartenere a $C^1(\mathbb{R})$ e a $C^2(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} a\cos(3x) & x \leq 0 \\ ax+bx^2 & x > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a\cos(3x) & x \leq 0 \\ a+bx^2 & x > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2ax^2+bx+1 & x \leq 1 \\ ax+2b & x > 1 \end{cases}$$

   Per i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui le funzioni risultano continue ma non derivabili in x_0, determinare se x_0 e' un punto angoloso.

4. Siano date le funzioni definite da

$$f_1(x) = \sqrt{x+3} - 5, \ f_2(x) = \frac{x}{1-x}, \quad f_3(x) = \sqrt{1-x^2},$$

$$f_4(x) = \left|x^3 - 1\right| + 3, \quad f_5(x) = \left|x^2 - 3x - 4\right|, \quad f_6(x) = \sqrt[7]{x - x^2}$$

$$f_7(x) = \sqrt{|x^3 - 1|}, \quad f_8(x) = \sqrt{|x^2 - 3x - 4|}, \quad f_9(x) = \exp(|x - x^2|),$$

$$f_{10}(x) = \exp(-\sqrt{x+3}), \ f_{11}(x) = \ln(\frac{x}{1-x}), \quad f_{12}(x) = \ln(\sqrt{1-x^2}).$$

   Determinare in quali punti sono continue, in quali sono derivabili e gli eventuali punti angolosi.

5. Dimostrare che fra tutti i triangoli isosceli di assegnata area A ne esiste uno di perimetro minimo. Ne esiste uno di perimetro massimo?

6. Dimostrare che fra tutti i triangoli isosceli di assegnato perimetro $2p$ ne esiste uno di area massima. Ne esiste uno di area minima?

7. Determinare dominio, segno, intervalli di crescenza e decrescenza ed eventuali punti a tangente orizzontale delle funzioni $x \mapsto f(x)$, dove $f(x)$ è dato da una delle seguenti espressioni

$$(x^3 - 9x)(x^2 + 2x + 1), \quad x^3 - 2x^2 + x - 1, \quad \frac{x^3}{x+7}, \quad x^3 - 2x - 1, \quad \frac{x}{x^2+7}$$

$$\frac{x^4}{x^2+7}, \quad \frac{-x^2}{x^4+7}, \quad \frac{x^2-2x+3}{x+7}, \quad \frac{x+7}{x^2-2x+3}.$$

   Determinare i punti di massimo e minimo relativo. Determinare inoltre quale delle precedenti funzioni ammette massimo o minimo sull'intervallo $[-3, 1]$

8. Determinare al variare di $A \in \mathbb{R}$, il minimo (massimo), se esiste, della funzione definita da
$$p(x) = 2(x + \frac{A}{x})$$
sulla semiretta $(0, \infty)$. Osservare che se $A > 0$, la funzione indica il perimetro di un rettangolo di area fissata.

9. Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{3x^2 - 9}}$

10. Sia $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definita da $x \mapsto \left| \sqrt{x - \sqrt{3x^2 - 9}} - 1 \right|$

    (a) Usando il grafico della f definita sopra, disegnare il grafico di g
    (b) Determinare l'immagine di g
    (c) Determinare i punti angolosi di g e le tangenti destre e sinistre in tali punti
    (d) Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione
    $$g(x) = k$$

11. Data la funzione definita da $f(x) = \tan(\sqrt{x})$, detetminarne il dominio e l'insieme dei punti in cui e' derivabile. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(\pi^2/9, f(\pi^2/9))$

12. Disegnare il grafico di $f(x) = \arctan(2x)$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(\sqrt{3}/2, f(\sqrt{3}/2))$

13. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione definita da $f(x) = |x^3 - 3|$ nell'intervallo $[0, 5]$.

14. Disegnare il grafico di $y = |x^4 - 16|$. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione nell'intervallo $[-1, 5]$.

15. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione definita da $f(x) = (x-1)^2 - 4\ln(x-1)$ nell'intervallo $\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, 5\right]$.

16. A partire dal grafico della funzione esponenziale (che deve essere noto), mediante traslazioni e simmetrie, disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = |e^x - 1|$. Determinare il massimo e il minimo della funzione nell'intervallo $[-1, 1]$

17. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ numero e segno delle soluzioni dell'equazione
$$e^{-(x-3)^2} = k$$

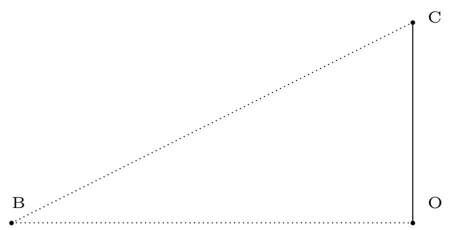
18. Delle funzioni precedentemente considerate, determinare gli intervalli di crescenza, decrescenza e, se i calcoli non risultano troppo gravosi, quelli di convessità e concavità. Disegnarne infine i grafici

19. Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = \dfrac{\ln(|x|)}{x}$.

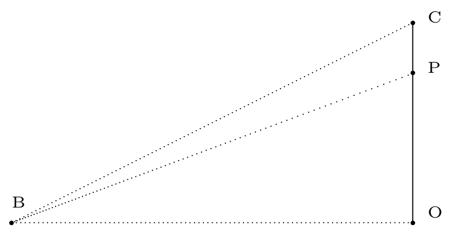
20. Determinare il dominio e disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = x^{x-1}$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(1, f(1))$

21. Disegnare il grafico della funzione definita da $f(x) = -2\ln\left(x^3 - 5\right) + 3x$. Determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(6, f(6))$.

22. Supponiamo che il disegno in figura rappresenti una spiaggia dove nel punto B abbiamo il nostro ombrellone. Vogliamo andare al bar che si trova nel punto C. Dal punto O parte una passerella di legno che raggiunge il bar e sulla quale si cammina più velocemente che sulla sabbia. Precisamente: supponiamo che sulla sabbia si cammini alla velocità di 1 metro al secondo, mentre sulla passerella alla velocità di $2\,m/s$. Supponiamo anche che i segmenti OB e OC siano tra loro perpendicolari. Inoltre la passerella è lunga 10 metri, mentre il tratto OB è 15 m. Partendo da B, determinare in quale punto della passerella conviene salire, per poi raggiungere il bar continuando a camminare su di essa, al fine di rendere minimo il tempo per arrivare dall'ombrellone al bar.



Svolgimento. Sia P il punto in cui si inizia a camminare sulla passerella. Chiamiamo x la misura del segmento OP. Il tratto percorso, indichiamolo con s, è funzione di $x \in [0, 10]$. Precisamente $s(x) = BP + PC = \sqrt{225 + x^2} + (10 - x)$. Anche il tempo impiegato $t(x)$ è funzione di x e si ottiene dal rapporto spazio/velocità: $t(x) = \sqrt{225 + x^2} + \frac{10-x}{2}$.



Studiando la funzione t si ricava che $5\sqrt{3}$ è il punto di minimo assoluto. Pertanto conviene salire sulla passerella nel punto P che dista $5\sqrt{3}$ metri da O. Quale sarebbe stata la conclusione dell'esercizio se la distanza OB fosse stata 18 metri? (si interpretino i calcoli con attenzione).

23. Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni delle seguenti equazioni

$$\arccos(x - 5) - \pi/4 = k, \quad (x - 1)^2 - 1 = k$$

24. Disegnare il grafico della seguente funzione e determinare l'esistenza di asintoti orizzontali e verticali e di discontinuità

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x) & x < -1 \\ \arccos(x) & x \in [-1, 1] \\ \arctan(x - 1) & x > 1 \end{cases}$$

25. Determinare graficamente al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, per tutte le funzioni di cui si è disegnato il grafico.

26. Determinare il segno delle seguenti funzioni, usando il teorema degli zeri e le equivalenze asintotiche
$$(x^3 - 9x)(x^2 + 2x + 1), \quad x\cos(x), \quad \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x - 4}, \quad \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^4 - 16}.$$

27. Usando le proprietà delle funzioni continue ed il concetto di limite dimostrare che l'equazione
$$\frac{x^{37} + 3x^{10} + 1}{x^2 + 1} = k$$
ammette soluzione per ogni $k \in \mathbb{R}$.

   Svolgimento. La funzione $f : x \mapsto \frac{x^{37}+3x^{10}+1}{x^2+1}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ poiché il polinomio x^2+1 non ammette radici reali, ne segue che la sua immagine è un intervallo. Inoltre
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{37} + 3x^{10} + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} x^{35} = \pm\infty,$$
quindi f è superiormente e inferiormente illimitata. L'unico intervallo superiormente ed inferiormente illimitato è $\mathbb{R}$, che coincide quindi con l'immagine di f. Ne segue che il grafico di f interseca tutte le rette orizzontali, cioè l'equazione $f(x) = k$ ammette soluzioni per ogni $k \in \mathbb{R}$.

28. Per quali valori dei parametri $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} h(x-3)^x & \text{se} \quad x > 3 \\ k + x^4 & \text{se} \quad x \le 3 \end{cases}$$
appartiene a $C^0(\mathbb{R})$? Per quali appartiene a $C^1(\mathbb{R})$? Quali sono gli $n \in \mathbb{N}$ per cui esistono valori dei parametri $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ per cui $f \in C^n(\mathbb{R})$?

29. Per quali valori dei parametri $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} h\,x\exp(1/x) & \text{se} \quad x > 0 \\ k + x^4 & \text{se} \quad x \le 0 \end{cases}$$
appartiene a $C^0(\mathbb{R})$? Quali sono gli $n \in \mathbb{N}$ per cui esistono valori dei parametri $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ per cui $f \in C^n(\mathbb{R})$?

   Svolgimento. f è C^∞ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, inoltre:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} hx\exp(1/x) = \begin{cases} +\infty & h > 0 \\ 0 & h = 0 \\ -\infty & h < 0 \end{cases} \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0}(k + x^4) = k = f(0)\,,\ \forall k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
Quindi $f \in C^0(\mathbb{R})$ se e solo se $h = k = 0$. Per questi valori dei parametri la funzione è C^3 e non C^4. Quindi esistono valori dei parametri $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ per cui $f \in C^n(\mathbb{R})$, se $n = 0, 1, 2, 3$