Esercizi sulle nozioni di base

1 Numeri reali e linguaggio

1.1 Prerequisiti

1. Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni e sistemi di disequazioni, esprimendole tramite unioni di intervalli e evidenziando le proprietà usate

$$3x+5 \le 3 \ (<3), \qquad \frac{3x+5}{x-7} \le \frac{x}{x-1}, \qquad |x+3| < 4 \ (\ge 4), \qquad \frac{2x^2-4x}{x+7} \ge 0$$

$$\begin{cases} 3x+5 \le 3 \\ x+7>0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 3x+5 \le 3, \\ x-7>0 \end{cases}$$

$$|x+3| \le |x-1|\,; \qquad ||x+1|-2| < 1; \qquad \frac{|x-1|}{|x+4|} \le 1; \qquad \sqrt{x^2-3} \le |x+1|$$

2. Risolvere graficamente, usando la nozione di distanza le seguenti disequazioni

$$|x-2| \le 3, \ |x+5| \ge 1, \ |x+5| \ge -1, \ |x+5| \le -1, \ x^2 < 1, \ x^4 > 16, \ |x-1| \le |x+2|$$

3. Data la disequazione
$$\frac{x+5}{x-3} < -4,$$
per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa, dandone una spiegazione teorica.

   (a) La disequazione è equivalente a:
   i) $x+5 < -4(x-3)$
   ii) $x+5 > -4(x-3)$
   iii) se nessuna delle precedenti equivalenze è vera, determinarne una corretta.

   (b) L'insieme delle sue soluzioni è
   i) un intervallo limitato
   ii) un intervallo limitato e chiuso
   iii) un intervallo limitato e aperto
   iv) una semiretta
   v) l'unione disgiunta di un intervallo limitato e di una semiretta

4. Risolvere al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ le disequazioni $|x-a| \le b$ $(< b)$ e $|x-a| \ge |x+b|$

5. Quali delle seguenti implicazioni fra numeri reali è corretta?

   - $a \ge 0 \iff -a \le 0$
   - $a \le b \implies ac \le bc$, $\forall c \in \mathbb{R}$
   - $a \le b$ e $c \le 0 \implies ac \ge bc$
   - $a^2 \ge 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$
   - $a^2 > 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$
   - Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Si ha $a^2 \le b^2 \implies a \le b$
   - Siano $a, b \ge 0$. Si ha $a \le b \iff a^2 \le b^2$
   - Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Si ha $a^2 \le b^2 \iff a \le b$

6. Date le tre *proprietà fondamentali* delle potenze (ad esponente reale):
   1) $a^x a^y = a^{x+y}$
   2) $(a^x)^y = a^{xy}$
   3) $a^x b^x = (ab)^x$,
   dedurne le seguenti ulteriori proprietà:
   4) $1/a^x = a^{-x}$
   5) $a^x/a^y = a^{x-y}$;
   6) $(a/b)^x = a^x/b^x$.

7. Determinare quoziente e resto della divisione fra le seguenti coppie di polinomi

$$x^3 - 2x^2 + 3 : x + 1\,, \quad x^3 - 2x^2 + 3 : x - 1$$
$$x^3 - 2x^2 + 3 : x^2 + 1\,, \quad x^3 - 2x^2 + 3 : x^3 - 1$$

8. Senza eseguire la divisione, determinare il resto della divisione fra le seguenti coppie di polinomi

$$x^3 - 2x^2 + 3 : x + 5\,, \quad x^3 - 2x^2 + 3 : x - 3$$
$$x^5 + 2x^2 + 3 : x - 1\,, \quad x^4 + 2x^3 + 3 : x + 1$$

   E' possibile eseguire lo stesso esercizio con la divisione $x^3 - 2x^2 + 3 : x^3 - 1$?

1.2 Logica e linguaggio

Di ogni enunciato da provare si individui l'ipotesi e la tesi

1. Dimostrare che $\sqrt{7}$ e $\sqrt{6}$ non sono razionali.

2. Dare la definizione di numero primo. Dimostrare che, se q è un numero primo, allora $\sqrt{q}$ non è razionale.

3. Dimostrare la seguente affermazione: *sia* $n \in \mathbb{N}$*, se* $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ *allora* $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$

4. Provare che la somma di due numeri razionali è un numero razionale.

5. Dedurre dall'esercizio precedente che la somma di un razionale e di un irrazionale è un irrazionale. Mostrare con un esempio che la somma di due irrazionali può essere razionale.

6. Sia $x \in \mathbb{R}$ tale che
$$|x| \leq \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$
   Provare che risulta $x = 0$. *Dimostrazione* Per assurdo, supponiamo $x \neq 0$ e consideriamo $\epsilon_0 = |x|/2$. Essendo $x \neq 0$, si ha $0 < \epsilon_0 < |x|$ contro l'ipotesi.

7. Sia a un numero reale non negativo. Supponiamo che per ogni $\epsilon > 0$ si abbia $a \leq \epsilon$. Provare che $a = 0$.

8. Provare che il quadrato di un numero (naturale) dispari è dispari. Pertanto, se il quadrato di un numero è pari, tale numero è necessariamente pari.

1.3 Intervalli e proprietà di completezza

Di ogni enunciato da provare si individui l'ipotesi e la tesi

1. Provare che l'intersezione di due intervalli è un intervallo (eventualmente vuoto o costituito da un sol punto).
2. Mostrare con un esempio che l'unione di due intervalli può non essere un intervallo.
3. Provare che se due intervalli hanno intersezione non vuota, allora la loro unione è un intervallo.
4. Provare che un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ è limitato se e solo se esiste un numero c tale che $|x| \le c$, $\forall\, x \in X$.
5. Mostrare che il massimo di un insieme, quando esiste, coincide con l'estremo superiore. Provare inoltre che l'estremo superiore di un insieme, quando appartiene all'insieme, coincide col massimo.
6. Provare che se $A \subseteq B$ allora $\sup A \le \sup B$. Osservare inoltre che, in virtù della convenzione $\sup \emptyset = -\infty$, tale relazione è verificata anche quando $A = \emptyset$.
7. Si consideri l'insieme $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ e si dimostri, usando le definizioni di estremo inferiore e di estremo superiore, che $\inf X = 0$ e $\sup X = 1$. Quale di essi è massimo o minimo?
   Suggerimento (per l'estremo inferiore). Si usi la Proprietà di Archimede per mostrare che X non ammette minoranti positivi.
8. Sia $A \subset \mathbb{R}$, definire il significato della scrittura $5 = \sup A$.
9. Sia $A = \{1 + x : x \in \mathbb{R}, x < 0\}$. Determinare $\sup A$ e $\inf A$ e dimostrare il risultato ottenuto.
10. Sia
    $$A = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n(1 - 1/n^2), n \in \mathbb{N}\}\,.$$
    provare che $\sup A = 1$; $\quad \inf A = -1$.
11. Sia
    $$A = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n n, n \in \mathbb{N}\}\,.$$
    Provare che $\sup A = +\infty$ e che $\inf A = -\infty$.

1.4 Funzioni

1. Date $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$, $h : x \mapsto 1/x$, calcolare $f \circ g$, $g \circ f, h \circ h$, specificando il dominio.
2. Determinare, quando esistono, le funzioni inverse delle seguenti funzioni, specificando il dominio della funzione e dell'inversa
   $$f(x) = x^2 - 2x + 3\,, f(x) = x^2 - 2x + 3 \ \text{ con dominio } \ [2, +\infty)$$
   $$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}\,, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 1} \ \text{ con dominio } \ (-\infty, 1)$$
   $$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 1} \ \text{ con dominio } \ (1, 2)\,, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 1} \ \text{ con dominio } \ [1, 2]$$
   $$f(x) = 2^{x+3}\,, \quad f(x) = 2^{x^2+3} \ \text{ con dominio } \ [2, +\infty)$$
   $$f(x) = \log_2(x^3)\,, \quad f(x) = \log_2(x^2 - 1)$$
   $$f(x) = \log_2(x^2 + 1) \ \text{ con dominio } \ (-\infty, 0)$$

3. Determinare il dominio e l'immagine delle funzioni definite da

$$f(x) \;=\; \sqrt{2\cos(x)+1},\;\; \sqrt{2\cos(x)\pm 4},\;\; \sqrt{\frac{1}{|\tan(x)|}},\;\; \arcsin\left(x^2-1\right),\;\; \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

e il dominio della funzione $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+\sin(\pi x)}{\sqrt{1-x^2}}}$,

4. Usando i concetti di cambio scala, traslazione e simmetria disegnare i grafici delle seguenti funzioni a partire da grafici noti e determinarne l'immagine

$$x \mapsto \sqrt{1-x}+1,\;\; \sin\left(|x|\right),\;\; |\sin\left(x\right)|,\;\; \sin\left(\pi x\right),\;\; |\arcsin(x/\pi)|,\;\; 2\arctan(|x|)-2$$

$$x \mapsto e^{x}, \quad e^{-x}, \quad e^{|x|}, \quad e^{-|x|}, \quad y=-e^{-|x|}$$

$$x \mapsto \ln(x), \quad \ln(-x), \quad \ln(|x|), \quad \ln(-|x|), \quad |\ln(x)|, \quad -\ln(-x), \quad -\ln(|x|)$$

14. Usando l'uguaglianza $\frac{x+5}{x-3} = 1 + \frac{8}{x-3}$, e i concetti di traslazione e cambio scala disegnare il grafico $y = \dfrac{x+5}{x-3}$, risolvere graficamente la disequazione $\dfrac{x+5}{x-3} < -4$.

5. Calcolare il dominio delle funzioni $x \mapsto \ln(x)^{\arcsin(x)}$, $\quad x \mapsto \arcsin(x)^{\ln(x)}$

6. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ x & x \in [-1,1] \\ -x^2 & x > 1\,, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x < 1 \\ x & x \in [1,2] \\ 2-x^2 & x > 2 \end{cases}$$

7. Dimostrare che esiste una applicazione biunivoca fra l'insieme $\mathbb{N}$ e l'insieme dei numeri naturali divisibili per 7.

8. Scrivere le seguenti funzioni reali di variabile reale come funzioni definite a tratti, specificando il dominio

$$x \;\mapsto\; \ln(|x^2-1|)\,,\; |\ln(x^2-1)|\,,\; |\arcsin(x^2-9)|\,,\; \text{arcos}(|1-x^2|)$$

9. Di tutte le funzioni considerate cercare di determinare estremo superiore, inferiore, massimo, minimo (se esistono) e gli eventuali punti di massimo e minimo.
Per massimo (minimo) si in tende il massimo (minimo) globale.