

1 Esercizi sull'approssimazione di Taylor

1.1 Esercizi svolti sulla definizione e le proprietà

1. Determinare la formula di MacLaurin del quinto ordine di $f(x) = \frac{x^5 e^{-x} \cos(2x)}{|2 - x^8 + 3x^{10}|}$.

Svolgimento. Si osservi che $f(x) = x^5 g(x)$, dove $g(x) = \frac{e^{-x} \cos(2x)}{|2 - x^8 + 3x^{10}|}$ è una funzione continua. Pertanto: $f(x) = x^5(g(0) + o(1)) = \frac{x^5}{2} + o(x^5)$, per $x \rightarrow 0$.

2. Calcolare la derivata quinta nel punto $x_0 = 2$ della funzione:

$$f(x) = \frac{(2-x)^6 \cos(x) + (2-x)^5 x^2}{1+x^7}.$$

Svolgimento. È sufficiente determinare la formula di Taylor di $f(x)$ del quinto ordine in $x_0 = 2$. Ponendo $x = 2 + h$, si ottiene, per $h \rightarrow 0$,

$$f(2+h) = \frac{(-h)^6 \cos(2+h) + (-h)^5 (2+h)^2}{1+(2+h)^7} = o(h^5) - h^5 \frac{4+o(1)}{1+2^7+o(1)}.$$

Cioè $f(2+h) = -\frac{4}{129}h^5 + o(h^5)$, e quindi: $f^{(5)}(2) = -\frac{4}{129}5! = -\frac{480}{129} = -\frac{160}{43}$.

3. Determinare l'approssimazione di MacLaurin di ordine 8 della funzione:

$$f(x) = 2x - x^3 \cos(2x) + |x|x^8 e^{-x} \cos(x).$$

Svolgimento. Poiché $|x|x^8 e^{-x} \cos(x) = o(x^8)$, per $x \rightarrow 0$, è sufficiente calcolare la formula di MacLaurin del quinto ordine di $\cos(2x)$. Da $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^5)$, con il cambiamento di variabile $t = 2x$, si ottiene $\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)$. In conclusione, si ha $f(x) = 2x - x^3 + 2x^5 - \frac{2}{3}x^7 + o(x^8)$.

4. Si determini la formula di MacLaurin del nono ordine della funzione $f(x) = x^5 \cos(3x)$. Si calcoli successivamente $f^{(6)}(0)$ e $f^{(7)}(0)$.

Svolgimento. Da $\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^5)$, otteniamo

$$x^5 \cos(3x) = x^5 - \frac{9}{2}x^7 + \frac{27}{8}x^9 + o(x^{10}), \text{ che è la formula di MacLaurin cercata.}$$

Si deduce quindi $f^{(6)}(0) = 0$ e $\frac{f^{(7)}(0)}{7!} = -\frac{9}{2} \implies f^{(7)}(0) = -\frac{9}{2}7!$.

5. Determinare la formula di Taylor di centro $x_0 = \pi$ del quarto ordine della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{\pi-x} & \text{se } x \neq \pi \\ 1 & \text{se } x = \pi \end{cases}. \quad \text{Si calcoli successivamente } f''(\pi).$$

Svolgimento. Ponendo $x - \pi = h$, si ottiene $f(\pi+h) = -\frac{\sin(\pi+h)}{h} = \frac{\sin(h)}{h}$, $h \neq 0$, e $f(\pi+h) = 1$, per $h = 0$. Dobbiamo quindi determinare la formula di MacLaurin della funzione $g(h) := f(\pi+h)$

$$g(h) := f(\pi+h) = \begin{cases} \frac{\sin(h)}{h} & \text{se } h \neq 0 \\ 1 & \text{se } h = 0 \end{cases}. \quad \text{Ricordando che } g \text{ è}$$

continua in zero, otteniamo: $g(h) = 1 - \frac{h^2}{3!} + \frac{h^4}{5!} + o(h^5)$ e quindi

$f(\pi + h) = g(h) = 1 - \frac{h^2}{3!} + \frac{h^4}{5!} + o(h^5)$, che dà la formula cercata. Quindi:

$$\frac{f''(\pi)}{2!} = -\frac{1}{3!} \implies f''(\pi) = -\frac{1}{3}.$$

1.2 Esercizi proposti sulla definizione e le proprietà

1. Determinare la derivata quinta e la derivata sesta nel punto $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 2x - x^3 \cos(2x) + |x|x^8 e^{-x} \cos(x)$ già considerata nel precedente esercizio svolto 1.1.3.
2. Determinare la formula di MacLaurin del quinto ordine della funzione $f(x) = |x|x^5 \cos(x) - x^2 \sin(2x)$ e calcolare $f^{(5)}(0)$.
3. Considerare le funzioni definite da $f(x) = \frac{x^5 e^{-x} \cos(2x)}{|2-x^8+3x^{10}|}$, $g(x) = \frac{e^{-x} \cos(2x)}{|2-x^8+3x^{10}|}$, già considerate nel precedente esercizio svolto 1.1.1, e rispondere alle seguenti domande.
 - (a) Usare una opportuna formula di McLaurin per $p(x) = 2 - x^8 + 3x^{10}$ per stabilire che la p ha un massimo locale in $x = 0$.
 - (b) Verificare che $|2 - x^8 + 3x^{10}| = 2 - x^8 + 3x^{10}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 - (c) Determinare la formula di McLaurin di ordine 8 di $f(x)$.
Suggerimento: osservare che $g(x) = e^{-x} \cos(2x)(2 - x^8 + 3x^{10})^{-1}$
4. Scrivere le formule di McLaurin di ordine 3 delle funzioni definite da $f(x) = \ln(\cos(x))$, $\sqrt{4+x}$.
5. Scrivere la formula di McLaurin di ordine n della funzione definita da $f(x) = \sin(x^n)$ e dedurne, al variare di $n \in \mathbb{N}$ se la funzione ha un estremo locale in $x = 0$.
6. Scrivere la formula di McLaurin di ordine n della funzione definita da $f(x) = \cos(x^n)$ e dedurne, al variare di $n \in \mathbb{N}$ se la funzione ha un estremo locale in $x = 0$.
7. Dalle formule di Taylor o McLaurin determinate negli esercizi svolti, dedurre se le rispettive funzioni hanno un punto di massimo o minimo locale nel centro x_0 . Inoltre disegnarne l'andamento locale.
8. Considerare la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & x > 0 \\ x + ax^2 - \frac{x^k}{6} & x \leq 0, \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Usando appropriate formule di McLaurin, verificare che $f \in C^0(\mathbb{R})$ per ogni valore dei parametri. Inoltre stabilire, al variare dei parametri, a quali classi $C^m(\mathbb{R})$ appartiene la funzione.

9. Considerare le funzioni definite da

$$f_1(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}, \quad f_2(x) = \sin(x) + \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x) - \cos(x).$$

Usando la formula di McLaurin di ordine 3 per f_1 e quella di ordine 2 per f_2 e f_3 , stabilire se esiste un intorno dell'origine in cui le funzioni siano crescenti, decrescenti, concave o convesse; disegnarne anche l'andamento locale.

1.3 Esercizi sul calcolo di limiti e di ricapitolazione

1. Calcolare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + e^{-x} + \cos(x) - 2}{x^n}$.

2. Determinare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{x^4 \cos(x) + x^3}$.

Svolgimento. Poichè per $x \rightarrow 0$, si ha $\sin(2x) - 2x \sim -\frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$ e $x^4 \cos(x) + x^3 \sim x^3$, otteniamo facilmente che il limite cercato esiste e vale $-\frac{4}{3}$.

3. Calcolare, se esiste, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x^2}$.

Svolgimento. Osserviamo che è sufficiente determinare la parte principale per $x \rightarrow 0$ della funzione al numeratore. Ricordando gli sviluppi di MacLaurin di seno ed esponenziale, abbiamo: $e^{\sin(x)} = e^{x+o(x)} = 1 + (x+o(x)) + o(x+o(x)) = 1 + x + o(x)$ (si provi che, se una funzione è un $o(x+o(x))$, allora è anche un $o(x)$). Il limite cercato coincide, quindi, con $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+o(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

4. Calcolare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \sin(1/x^3).$$

5. Calcolare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3 + \sin(x^4)) - \ln(3)}{x^n}$$

6. Calcolare, se esistono, al variare di $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(10 + \sin(x^3)) - \ln(10)}{x^n}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(10 + \sin(|x|^3)) - \ln(10)}{|x|^n},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(10 + \sin(|x|^3)) - \ln(10)}{x^n}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(10 + \sin(x^3)) - \ln(10)}{|x|^n}$$

7. Rispondere alle seguenti domande sulla funzione definita da $f(x) = x^{15}e^{2x}$.

- (a) Determinare l'approssimazione di McLaurin di ordine 30 di f
- (b) La funzione ha ordine per $x \rightarrow 0$? Se sì, determinarlo e determinare la parte principale per $x \rightarrow 0$ (cioè determinare l'infinitesimo equivalente).
- (c) Stabilire qual è la prima derivata non nulla in $x_0 = 0$ di f e determinarne il valore
- (d) Stabilire se la funzione ha in $x_0 = 0$ un massimo o un minimo locale, oppure un flesso a tangente orizzontale.
- (e) Determinare, se esiste, al variare di $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{f(x)}$
- (f) Determinare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni e studiarne il grafico.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - 4}, \quad f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$