1 Esercizi sulle serie

1.1 Esercizi svolti

1. Stabilire, usando la definizione, il carattere della serie $\sum_{n\geq 1}(-3)^n$.

   Svolgimento. Il carattere della serie coincide col carattere della successione delle somme parziali:

$$n \mapsto \sum_{k=1}^{n}(-3)^k = -3\sum_{k=0}^{n-1}(-3)^k = \frac{3((-3)^n - 1)}{4} = \begin{cases} 3(3^n-1)/4 & n \text{ pari} \\ -3(3^n+1)/4 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

   Poiché $S_{2n} \to +\infty$ e $S_{2n+1} \to -\infty$, la serie è irregolare.

2. Usando la teoria delle serie determinare la frazione generatrice di $1,1\overline{31}$

   Svolgimento.

$$1,1\overline{31} = \frac{11}{10} + \frac{31}{1000}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right) = \frac{11}{10} + \frac{31}{10^3}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{10^{2n}} =$$

$$= \frac{11}{10} + \frac{31}{10^3}\frac{10^2}{99} = \frac{11}{10} + \frac{31}{990}$$

1.2 Esercizi proposti

1. Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{k\geq 1}\frac{5k^2-1}{k^3+1}\tan(\frac{1}{k}), \quad \sum_{k\geq 1}\tan(\frac{1}{k^2}), \quad \sum_{k\geq 0}\frac{n+1}{n!}$$

   Si consiglia di usare il criterio confronto asintotico

2. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ le seguenti serie convergono

$$\sum_{k\geq 1}\frac{e^{kx}}{k}, \quad \sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{1+kx^2}$$

3. Svolgere gli esercizi del libro di testo relativi agli argomenti fatti.

4. Dire cosa significa che la serie

$$\sum_{n\geq 3} a_n \tag{1}$$

   converge, diverge o è indeterminata

5. Ponendo nella serie (1) $a_n = (\sin(3x))^n$, determinare, usando la definizione, per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.

6. Usando la definizione, stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la seguente serie e calcolarne la somma $\sum_{n\geq 3}(3\sin(x))^n$

7. Definire la seguente uguaglianza $\sum_{n\geq 1} a_n = 7$ e determinare, usando la definizione, il carattere della serie $\sum_{n\geq 1}(-1/2)^n$.

8. Stabilire, usando la definizione, se la serie $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\sin(x)}{3}\right)^n$ converge, diverge o è indeterminata, al variare di $x \in \mathbb{R}$.
9. Spiegare perchè la serie $\sum_{n\geq 1}(\arccos(x))^n$ non può essere indeterminata per nessun valore di $x \in [-1, 1]$
10. Sia $b \in \mathbb{R}$ un parametro, usando la definizione stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la serie
$$\sum_{n\geq 3}(\sin(b\,x))^n.$$

1.3 Paradosso di Zenone

Formalizzare il seguente paradosso di Zenone detto di **Achille e la tartaruga** e mostrare, attraverso il concetto di somma della serie, che Achille raggiungerà la tartaruga in un tempo T dato dall'applicazione della cinematica (se si indica con s lo spazio percorso con una velocità costante v per un tempo t, allora $s = vt$)

Se Achille (detto piè veloce) venisse sfidato da una tartaruga nella corsa e concedesse alla tartaruga un vantaggio pari a L, egli non riuscirebbe mai a raggiungerla, dato che Achille dovrebbe prima raggiungere la posizione occupata precedentemente dalla tartaruga che, nel frattempo, sarà avanzata raggiungendo una nuova posizione che la farà essere ancora in vantaggio; quando poi Achille raggiungerà quella posizione nuovamente la Tartaruga sarà avanzata precedendolo ancora. Questo stesso discorso si può ripetere per tutte le posizioni successivamente occupate dalla tartaruga e cosí la distanza tra Achille e la lenta tartaruga non arriverà mai ad essere pari a zero.

In pratica, posto che la velocità di Achille sia costante uguale a V_a e quella della tartaruga sia costante uguale a V_t le cose avvengono cosí:
** dopo un certo tempo t_1 Achille arriva nel punto $L_1 = L$ dove era la tartaruga alla partenza.*
** nel frattempo la tartaruga ha compiuto un pezzo di strada e si trova nel punto L_2.*
** occorre un ulteriore tempo t_2 per giungere in L_2.*
** ma nel frattempo la tartaruga giunta nel punto L_3 ... e cos via.*

Quindi per raggiungere la tartaruga Achille impiega un tempo
$$T = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n + ...$$
e quindi non la raggiungerà mai.

Per maggiori notizie sui **Paradossi di Zenone** vedi
$$http://it.wikipedia.org/wiki/Paradossi\_di\_Zenone$$
da cui sono tratte le seguenti notizie.

I paradossi di Zenone ci sono stati tramandati attraverso la citazione che ne fa Aristotele nella sua Fisica. Zenone di Elea, discepolo ed amico di Parmenide, per sostenere l'idea del maestro, che la realtà è costituita da un Essere unico e immutabile, propose alcuni paradossi che dimostrano, a rigor di logica, l'impossibilit della molteplicità e del moto, nonostante le apparenze della vita quotidiana.

Oggi non si dà alcun valore alle argomentazioni di Zenone, in quanto dopo la scoperta, in matematica, degli infinitesimi e del modo di elaborarli, diventa molto facile vedere dove risiede l'errore. Nei ragionamenti attribuiti a Zenone viene dato per scontato il (pre)concetto che una somma di infiniti termini debba per forza essere di valore infinito. Al contrario, oggi siamo in grado di concepire la suddivisione di una grandezza in infinite parti di valore infinitesimo, ma non nullo. Analogamente possiamo concepire che la somma di un numero infinito di parti (infinitesime) può dare un risultato finito. I paradossi di Zenone restano comunque un utile esercizio di logica, per riflettere sulla modalità di costruzione dei ragionamenti umani. Si ricordano due paradossi contro il pluralismo e quattro contro il movimento.