n. **25** Matricola:

Nome: ,

Domanda 1) Determinare l'area della parte limitata di piano individuata dal grafico $y = -\frac{1}{3}(x+6)^3$ e dalla retta di equazione $y = -2x - 12$

A) 0 B) −6 C) 6 D) 3

Domanda 2) Calcolare (se esiste), al variare di $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin\left(\ln\left(1-4x^{10}\right)\right)}{x^{2n}}$

A) esistono valori di n per cui il limite non il limite esiste
B) il limite esiste non finito se e solo se $n \leq 5$
C) il limite esiste per ogni valore di n
D) il limite non esiste per nessun valore di n

Domanda 3) Sia F la funzione definita da $F(x) = \int_{-4}^{x} \frac{t-4}{t^3-4t}\,dt$. Allora posso affermare che

A) F è negativa per $x < -4$
B) F ha un massimo relativo
C) F è positiva per $x < -4$
D) F è negativa per $x > -4$ nel suo dominio

Domanda 4) L'equazione differenziale $x'' - 6x' + 9x = 0$ ha le seguenti soluzioni linearmente indipendenti:

A) $\cos(3t), \quad \sin(3t)$
B) $e^{-t}\cos(3t), \quad e^{-t}\sin(3t)$
C) $e^{3t}, \quad t\,e^{3t}$
D) $e^{3t}, \quad e^{-3t}$

Domanda 5) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ con discontinuità di salto per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Allora si può affermare che:

A) la funzione f è integrabile secondo Riemann su un intervallo I, se e solo se I non contiene numeri interi
B) $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ è una funzione derivabile in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$
C) la funzione $x \mapsto \int_3^x f(t)dt$ è definita solo per $x = 3$.
D) per ogni $n \in \mathbb{Z}$, la funzione $x \mapsto \int_n^x f(t)dt$ non è definita per nessun numero reale x.

Domanda 6) La seguente serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^{3n}}{(-64)^n}$, converge se e solo se

A) $|x-5| < 64$ B) $|x| < 1$
C) $1 < x < 9$ D) $|x+5| < 4$

Domanda 7) Quale delle seguenti affermazioni sulla serie $\sum_{n\geq 3} a_n$ è corretta?

A) Se la serie è definitivamente a termini positivi e $a_n \sim \frac{3}{n^5}$, allora la serie diverge.
B) Se la serie è definitivamente a termini positivi e $\lim |a_n| = 2$, allora la serie diverge.
C) Se $\lim |a_n| = 0$, allora la serie converge.
D) Se $\lim |a_n| = 2$, allora la serie diverge.

Matricola:

Nome:

n. 25

Domanda 1) Usando l'approssimazione di McLaurin binomiale, calcolare la prima derivata non nulla della funzione $f(x) = \sqrt[5]{(1+x^8)^2}$ e stabilire se l'origine è un punto di massimo o minimo locale per f, oppure è un flesso a tangente orizzontale. Illustrare il risultato con un disegno.
Motivare adeguatamente le risposte

Domanda 2) A partire dai grafici delle funzioni $x \mapsto \arctan(x)$ e $x \mapsto \frac{1}{x^3}$, che devono ritenersi noti, disegnare il grafico di $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & \text{se } |x| \geq 1 \\ |\arcsin(x)| & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$ e rispondere alle seguenti domande sulla funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Determinare il dominio.
2. Determinare dove è continua, dove è derivabile e gli eventuali asintoti verticali.
3. Determinare eventuali punti angolosi, cuspidi e flessi a tangente verticale.
4. Stabilire gli intervalli di crescenza e decrescenza.
5. Mettere in relazione l'esistenza di asintoti orizzontali di F con gli opportuni integrali impropri di f.
6. Dopo aver verificato, mediante la teoria degli integrali impropri, che F ha un asintoto orizzontale destro e uno sinistro, calcolare l'asintoto sinistro e dedurne il numero di zeri di F (si consideri $\sqrt(2) \sim 1.41$).
7. Disegnare il grafico di F.

Motivare adeguatamente le risposte

Domanda 3) Considerare il seguente problema di Cauchy $f(x) = \begin{cases} y' & = \frac{5}{x}y \\ y(-1/2) & = -1 \end{cases}.$

1. Determinare su quale intervallo massimale il problema soddisfa le condizioni di esistenza e unicità.
2. Determinare la soluzione, spiegando opportunamente i presupposti teorici.