1 Note sulle equazioni differenziali ordinarie

La ricerca di una primitiva su un intervallo, $y' = f(x)$, è l'esempio più semplice di *equazione differenziale* cioè la ricerca di una funzione con assegnata derivata. L'incognita è una funzione definita su un intervallo I (indicata con y) e l'equazione coinvolge la derivata della funzione incognita e la variabile indipendente (indicata con x). Come abbiamo visto la soluzione può non esistere, ma se la soluzione esiste non è unica, per sceglierne una bisogna assegnare la *condizione iniziale*, cioè il valore della funzione in un punto $x_0 \in I$, detto iniziale. Inoltre sappiamo che se $f \in C^0(I)$, la soluzione esiste.

Piú in generale una equazione differenziale ordinaria (indicata spesso con l'acronimo EDO, in italiano, oppure ODE dall'inglese ordinary differential equation) è una equazione la cui incognita è **una funzione definita su un intervallo** e che lega fra loro la funzione incognita e un numero finito di sue derivate. L'ordine massimo di derivazione che appare nell'equazione si dice *ordine dell'equazione*. Se la derivata di ordine massimo si può scrivere come funzione della variabile indipendente, della funzione e delle altre derivate, la EDO si sice *in forma normale*. Indicheremo una EDO di ordine n in forma normale col simbolo

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{1}$$

In questa scrittura x indica la variabile indipendente e y è il simbolo per la funzione incognita. A seconda del contesto altre lettere possono essere usate sia per la variabile indipendente che per l'incognita. In particolare se la variabile indipendente indica il tempo, viene indicata con t. In questo caso la derivazione viene spesso indicata con un punto sovrascritto, ad esempio $\ddot{x} = tx\dot{x}$ è una EDO del secondo ordine in forma normale dove la variabile indipendente è t e il simbolo per la funzione è x.

Altre notazioni sono in uso, ad esempio la dipendenza dalla variabile independente può essere esplicitata scrivendo $y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$.

Definizione 1.1. *Una funzione f definita su un intervallo I si dice soluzione dell'equazione (1) se*

$$f^{(n)}(x) = F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)),\ \forall x \in I.$$

Cioè sostituendo la funzione soluzione nell'equazione, si deve ottenere una identità fra funzioni definite sull'intervallo I.

Si noti che per definizione le soluzioni di una EDO sono definite su intervalli, altrimenti tutta la teoria in proposito sarebbe falsa.

Esercizi 1.1.
1. *Per quali valori di $\omega \in \mathbb{R}$ la funzione $y = \sin(\omega x)$ è soluzione della EDO $y'' + 4y = 0$? In quale intervallo?*
2. *Data la EDO $\dot{x} = x - x^2$, determinare le eventuali soluzioni costanti. Determinare inoltre per quali valori di $a, b, c \in \mathbb{R}$ la soluzione (non costante) $x = \frac{b\,e^{at}}{1+c\,e^{at}}$ è soluzione. In quale intervallo? Disegnarne il grafico. Si consiglia di considerare separatamente i casi $c = 0$, $c > 0$, $c < 0$.*

Come abbiamo visto anche nel caso più semplice, se la soluzione esiste non è unica, per ottenere l'unicità della soluzione su un *intervallo massimale* bisogna introdurre il *problema di Cauchy* detto anche *ai valori iniziali*

$$\begin{cases} y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = b_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Cioè si devono assegnare i valori assunti in un punto x_0 dalla funzione e dalle sue derivate fino all'ordine $n-1$ (si noti che si assegnano n condizioni per una equazione di ordine n). In generale nel problema di Cauchy l'incognita è la funzione e *l'intervallo massimale* su cui può essere definita.

Esercizio. Dopo aver risolto l'esercizio 1.1.2, si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$, con $x_0 = 0, 1, 1/2, 3, -1$ e se ne disegni il grafico, specificando il dominio. Si osservi come tali grafici abbiano domini diversi e si rifletta sulla diversità di comportamento rispetto alle soluzioni delle EDO lineari, che verranno descritte di seguito.

Noi ci occuperemo essenzialmente di equazioni lineari. I risultati generali sono dati per qualsiasi ordine. Lo studente espliciti i risultati per l'ordine uno e l'ordine due (che sono gli ordini richiesti per il superamento dell'esame).

Una EDO si dice *lineare*, se l'equazione che la definisce è un polinomio di primo grado nell'incognita e le sue derivate. Indicheremo una EDO lineare in forma normale con

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \varphi(x). \tag{3}$$

L'equazione si dice *omogenea* se la funzione φ è la funzione nulla. L'equazione si dice *non omogenea* se la funzione φ non è la funzione nulla.

Nel paragrafo 17.3 del testo, è svolta la teoria delle equazioni lineari del secondo ordine che qui svolgiamo per quelle di ordine n, poiché niente cambia. Riportiamo i teoremi fondamentali che vanno compresi e saputi usare, senza dimostrazione. Si osserva, per gli studenti interessati, che tutta la teoria delle EDO lineari segue facilmente (con metodi di algebra lineare) dal seguente teorema di Cauchy, la cui dimostrazione richiede invece strumenti piú delicati.

Teorema 1.1 (di Cauchy o ai valori iniziali per EDO lineari)**.** *Siano $a_0, \dots, a_{n-1}, \varphi \in C^0(I)$, $x_0 \in I$ e $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \varphi(x) \\ y(x_0) = b_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases} \tag{4}$$

ammette una soluzione unica su I. Inoltre tale soluzione è di classe C^n.

Corollario 1.1. *Siano $a_0, \dots, a_{n-1} \in C^0(I)$ e $x_0 \in I$. Allora la soluzione identicamente nulla su I è l'unica soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Teorema 1.2 (struttura delle EDO lineari omogenee)**.** *L'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni di una EDO lineare omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n. Cioè esistono n funzioni linearmente indipendenti $f_1, \dots, f_n \in C^n(I)$ tali che*

$$\mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \colon c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

$y = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$ *si dice anche* la soluzione generale *dell'equazione e* $c_1, \ldots, c_n$ *si dicono* le costanti arbitrarie*.*
Inoltre $f_1, \ldots, f_n$ *sono linearmente indipendenti se e solo se sono soluzioni di problemi di Cauchy associati all'equazione con condizioni iniziali in* $x_0 \in I$ *che sono vettori linearmente indipendenti in* $\mathbb{R}^n$*. In altre parole possiamo trovare una base per* $\mathcal{S}$ *risolvendo* n *problemi di Cauchy del tipo*

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)} = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0, \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)} = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{cases}$$

Teorema 1.3 (struttura delle EDO lineari non omogenee)**.** *Sia* h *una qualsiasi soluzione della EDO lineare non omogenea (3), allora l'insieme delle soluzioni di (3) è dato da*

$$\{f + h \colon f \in \mathcal{S}\}\,.$$

Con le notazioni del precedente Teorema 1.2, $y = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) + h(x)$ *si dice anche la* soluzione generale *dell'equazione non omogenea.*
Inoltre h *viene chiamata anche* soluzione particolare*, ed il teorema viene anche enunciato come:* la soluzione generale di una EDO lineare non omogenea si ottiene come la somma della soluzione generale della EDO omogenea associata con una soluzione particolare*.*

1.1 EDO lineari del primo ordine

$$y' + a(x)y = \varphi(x) \quad a, \varphi \in C^0(I). \tag{6}$$

Dai teoremi generali risulta che per prima cosa dobbiamo cercare una soluzione dell'equazione omogenea $y' = -a(x)y$. È facile vedere che se A è una primitiva di a su I (che sappiamo esistere per il teorema fondamentale del calcolo), allora $y = e^{-A(x)}$ è una soluzione.

Dalla teoria generale segue che $y = ce^{-A(x)}$, $c \in \mathbb{R}$, è la soluzione generale dell'equazione omogenea.
Per cercare una "soluzione particolare" di (6) si può cercare di "indovinarla" (vedi il Par. 17.1.2 "metodi ad hoc"), oppure si usa il metodo di "variazione delle costanti", cioè si cerca una soluzione del tipo $h(x) = c(x)e^{-A(x)}$. Sostituendo in (6), otteniamo

$$c'(x)e^{-A(x)} - c(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)c(x)e^{-A(x)} = \varphi(x) \Longrightarrow c'(x) = \varphi(x)e^{A(x)}.$$

Calcolando una primitiva di $\varphi(x)e^{A(x)}$ e sostituendola in h, otteniamo la "soluzione particolare" ed infine la soluzione generale di (6) come $y = ce^{-A(x)} + h(x)$.

Nel caso si ricerchi la soluzione di un problema di Cauchy, con condizione iniziale in $x_0 \in I$

$$\begin{cases} y' + a(x)y = \varphi(x) \\ y(x_0) = b_0 \end{cases} \tag{7}$$

si può trovare la soluzione generale come indicato sopra e risolvere l'equazione lineare in c, data da $ce^{-A(x_0)} + h(x_0) = b_0$, oppure scegliere opportunamente le primitive nel seguente modo:

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt\ , \quad h(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} \varphi(t)dt\,.$$

La soluzione di (7), sarà:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \left(b_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} \varphi(t)dt \right). \tag{8}$$

Non sempre è possibile calcolare esplicitamente gli integrali, ma la (8) rappresenta comunque la soluzione del problema di Cauchy su I.

1.2 EDO lineari del secondo ordine

I metodi risolutivi per queste EDO saranno considerati solo per equazioni a "coefficienti costanti", cioè considereremo equazioni

$$y'' + by' + cy(x) = \varphi(x) \quad b, c \in \mathbb{R}\,,\ \varphi \in C^0(I). \tag{9}$$

Applicando la teoria generale a questa equazione, si devono trovare due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata: $y'' + by' + cy = 0$. A questo scopo si cercano soluzioni del tipo $y = e^{\lambda x}$ e si vede facilmente che l'equazione omogenea è soddisfatta se e solo se λ è soluzione della seguente equazione di secondo grado, detta *equazione caratteristica.*

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{10}$$

Le soluzioni della EDO omogenea dipendono dal valore del discriminante $\Delta = b^2 - 4c$ dell'equazione caratteristica

1. $\Delta > 0$, due soluzioni reali e distinte di (10), λ_1, λ_2. Le due soluzioni linearmente indipendenti sono $f_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $f_2(x) = e^{\lambda_2 x}$. Pertanto la soluzione generale sarà
$$y = \alpha\, e^{\lambda_1 x} + \beta\, e^{\lambda_2 x}\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$
2. $\Delta = 0$, una soluzioni reale di (10), λ. Le due soluzioni linearmente indipendenti sono $f_1(x) = e^{\lambda x}$ e $f_2(x) = xe^{\lambda x}$ (verificare che f_2 è soluzione per esercizio). Pertanto la soluzione generale sarà
$$y = e^{\lambda x}(\alpha + \beta\, x)\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$
3. $\Delta < 0$, due soluzioni complesse coniugate di (10), $\lambda = -\frac{b}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. Ponendo
$$\mu = -\frac{b}{2} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} > 0\,,$$
le due soluzioni linearmente indipendenti sono $f_1(x) = \cos(\omega x)$ e $f_2(x) = \sin(\omega x)$ (verificare che f_1, f_2 sono soluzioni per esercizio). Pertanto la soluzione generale sarà
$$y = e^{\mu x}(\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x))\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

Per cercare una "soluzione particolare" di (9) si può cercare di "indovinarla" (vedi il Par. 17.3.2 "metodi ad hoc"), oppure si usa il metodo di "variazione delle costanti", cioè si cerca una soluzione del tipo $h(x) = \alpha(x)f_1(x) + \beta(x)f_2(x)$, che porta sempre ad una soluzione esprimibile in forma di funzioni integrali, anche nel caso che f_1 e f_2 siano soluzioni di una EDO lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti non costanti. Per i dettagli si veda il Par. 17.3.2, comunque il metodo porta a risolvere un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite $\alpha'(x)$, $\beta'(x)$, a determinante diverso da zero. Una volta determinati $\alpha'(x)$ e $\beta'(x)$, si possono determinare due loro primitive (eventualmente come funzioni integrali) e determinare $h(x)$.

Per il superamento dell'esame è richiesto di saper calcolare la soluzione particolare mediante suggerimenti che comportino l'uso della definizione di soluzione e il seguente caso.

1.3 Oscillatore armonico forzato

$$y'' + \omega^2 y = A\cos(\gamma x) + B\sin(\gamma x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R} \tag{11}$$

In questo caso, per le proprietà di derivazione di seno e coseno, l'intuito suggerisce di ricercare una soluzione del tipo $h(x) = c_1\cos(\gamma x) + c_2\sin(\gamma x)$, dove c_1, c_2 sono numeri reali da determinare. In effetti, se $\gamma \neq \omega$, si perviene all'identità

$$c_1(\omega^2 - \gamma^2)\cos(\gamma x) + c_2(\omega^2 - \gamma^2)\sin(\gamma x) = A\cos(\gamma x) + B\sin(\gamma x)$$

che ci permette di determinare c_1, c_2 in maniera unica. Si ha la soluzione particolare $h(x) = \frac{A}{(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma x) + \frac{B}{(\omega^2-\gamma^2)}\sin(\gamma x)$ e quindi alla soluzione generale dell'equazione (11)

$$y = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)) + \frac{A}{(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma x) + \frac{B}{(\omega^2-\gamma^2)}\sin(\gamma x)\,.$$

Si noti che in questa formula A, B, ω, γ sono dati del problema, mentre α, β sono le costanti arbitrarie. Le soluzioni di (11) sono periodiche se e solo se ω/γ è razionale (provarlo per esercizio), comunque in questo caso ogni soluzione è limitata.

1.3.1 Risonanza, caso $\gamma = \omega$

$$y'' + \omega^2 y = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

In questo caso, il precedente metodo non conduce a nessuna soluzione. Questo non deve meravigliare, visto che la $h(x)$, sopra definita, è soluzione dell'equazione omogenea associata. In questo caso la soluzione particolare si cerca del tipo $h(x) = x\,(c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x))$ e si perviene all'identità

$$2\,(c_2\omega\cos(\omega x) - c_1\omega\sin(\omega x)) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

che ci permette di determinare c_1, c_2 in maniera unica. Si ha la soluzione particolare $h(x) = x\left(-\frac{B}{2\omega}\cos(\omega x) + \frac{A}{2\omega}\sin(\omega x)\right)$ e quindi alla soluzione generale dell'equazione (11)

$$y = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)) + x\left(-\frac{B}{2\omega}\cos(\omega x) + \frac{A}{2\omega}\sin(\omega x)\right)\,.$$

In questo caso le soluzioni sono tutte illimitate e consistono in un'onda la cui ampiezza tende all'infinito. Come esempio si disegni il grafico della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 9y = 6\cos(3x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Ripetendo la procedura seguita si perviene alla soluzione generale dell'equazione:

$$y = \alpha\cos(3x) + (\beta + x)\sin(3x))\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 3\beta = 0\,, \end{cases}$$

per cui la soluzione risulta $y = x\sin(3x)$. Si noti che in questo problema di Cauchy condizioni iniziali nulle portano ad una soluzione non nulla; questo non è in contraddizione con la teoria generale perchè l'equazione non è omogenea.

1.4 Esercizi

1. **Caduta dei gravi in mezzo viscoso.** Il moto avviene in direzione verticale e, detto $k > 0$ il coefficiente di viscosità e m la massa, l'equazione diventa la seguente equazione lineare a coefficienti costanti
$$z''(t) = -g - \frac{k}{m} z'(t).$$
Trovarne la soluzione generale cercando una soluzione particolare del tipo $z = At$. Indicando la velocità z' con v e $\mu = \frac{k}{m} > 0$ si ottiene l'equazione differenziale *lineare del primo ordine non omogenea*
$$v'(t) + \mu v(t) = -g.$$
Determinarne la soluzione generale e risalire alla soluzione generale della EDO del secondo ordine. Confrontare i risultati ottenuti.

2. **Equazione di moto del pendolo per le piccole oscillazioni**. Un pendolo di lunghezza l, spostato di un angolo orientato α dalla posizione di equilibrio stabile $\alpha = 0$ è sottoposto ad una forza (risultante della forza peso e della reazione vincolare) che ha direzione tangente alla circonferenza descritta dal pendolo e verso che si oppone allo spostamento. Un semplice conto trigonometrico mostra che l'intensità della forza è data da $m\, g \sin(\alpha)$ (m massa, g accelerazione di gravità). L'equazione fondamentale della dinamica implica che lo spostamento dalla posizione di equilibrio $t \mapsto s(t) = l\, \alpha(t)$ soddisfa alla seguente equazione differenziale non lineare del secondo ordine.
$$s''(t) + g \sin(s(t)/l) = 0.$$
Piccole oscillazioni. Significa che consideriamo la parte principale della forza, in questo caso l'equazione diventa lineare del secondo ordine. Indicando con ω^2 il numero positivo g/l, si ottiene
$$s''(t) + \omega^2 s(t) = 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad \alpha''(t) + \omega^2 \alpha(t) = 0,$$
detta anche equazione del moto armonico. Si noti che una equazione simile si ottiene anche quando siamo in presenza di una forza elastica che si oppone al moto.

   (a) Verificare che le funzioni $t \mapsto \sin(\omega t)$ e $t \mapsto \cos(\omega t)$ sono soluzioni dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni.

   (b) Usare la teoria svolta per dimostrare che, per ogni $A, B \in \mathbb{R}$, la funzione $t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ è soluzione dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni e che al variare di $A, B \in \mathbb{R}$ otteniamo tutte le soluzioni dell'equazione.

   (c) Verificare che, per ogni $\rho, \beta \in \mathbb{R}$, la funzione $t \mapsto \rho\cos(\omega t + \beta)$ è soluzione dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni.

   (d) Verificare che le forme (b) e (c) per le soluzioni del moto armonico sono equivalenti. Nella forma (c) alle coppie di parametri (ρ, β) e $(-\rho, \beta + \pi)$ corrisponde la stessa soluzione. Nelle applicazioni spesso si usa $\rho \geq 0$ e $\beta \in [0, 2\pi)$. ρ è detta ampiezza dell'oscillazione e β fase. Inoltre a $\rho = 0$ o equivalentemente a $A = B = 0$ corrisponde la soluzione nulla. Disegnare il grafico delle soluzioni in funzione di ampiezza e fase.

   (e) Determinare la soluzione dell'equazione del pendolo per le piccole oscillazioni con condizioni iniziali $s(0) = s_0,\ s'(0) = 0$ (spostamento del pendolo dalla posizione di equilibrio) e con condizioni iniziali $s(0) = 0,\ s'(0) = v_0$ (spinta del pendolo nella posizione di equilibrio). A quale problema di Cauchy corrisponde la soluzione nulla?

3. Studiare le soluzioni di $y'' + 2\mu y' + \omega^2 y = 0,\ \mu > 0$, in dipendenza del discriminante dell'equazione caratteristica.

4. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine sulla semiretta $(0, +\infty)$
$$x^2 y'' + 2xy' - \frac{15}{4} y = 0.$$
   a. Verificare che $y(x) = x^{3/2}$ e $y = x^{-5/2}$ sono soluzioni della precedente equazione
   b. Determinare la soluzione generale della precedente equazione
   c. Determinare la soluzione del problema con condizioni iniziali
$$y(1) = 1, \qquad y'(1) = 2$$

5. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine
$$y'' + 3y' + 3y = 0.$$
   a. Determinare la soluzione generale della precedente equazione.
   b. Determinare la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali
$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$$
   c. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la soluzione dell'equazione con condizioni iniziali
$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$
   tende a 0 per $x \mapsto +\infty$?

6. Supponiamo che lo spostamento di una molla in un mezzo viscoso sia determinato dall'equazione
$$\ddot{y} + \dot{y} + y = 0$$
e che al tempo $t = 0$ si abbia $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 2$
   (a) Determinare lo spostamento in funzione del tempo
   (b) Determinare, se esiste, il limite dello spostamento quando il tempo tende a $+\infty$
   (c) Determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui lo spostamento della molla che al tempo $t = 0$ soddisfa a
$$y(0) = a, \qquad \dot{y}(0) = b$$
   decresce senza oscillare.

7. Determinare la soluzione generale delle equazioni lineare del primo ordine
$$y' = -4y + 3x + 1\ , \quad y' = y + \sin(x)$$

8. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = 3y + e^{2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y' = 2y + e^{2x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

9. Determinare la soluzione generale di
$$y'' + 2y' - 3y = e^{4x},$$
cercando una soluzione particolare del tipo $y = Ae^{4x}$.

10. Risolvere i problemi di Cauchy con $x(0) = 1$ associati alle seguenti equazioni
$$x' = 4x\ , \quad x' = x + 3t^3 + 4t^2 + 1$$
$$x' = x + \sin(t)\ , \quad x' = 3x + \exp(2t)$$

11. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy, specificando il dominio della soluzione:
$x'' + 9x = -\sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$
$x' = 1/(1 - t^2)x$, $x(0) = 2$

12. Determinare la soluzione generale di:
$x'' + x = t^3 - t + 1$, cercando una soluzione particolare fra i polinomi di grado 3.

13. Verificare che se y_1 è soluzione particolare di $y'' + ay' + b = f_1(t)$ e y_2 è soluzione particolare di $y'' + ay' + b = f_2(t)$, allora $(y_1 + y_2)$ è soluzione particolare di $y'' + ay' + b = f_1(t) + f_2(t)$

14. Supponiamo che un'oscillazione forzata sia determinata dalla seguente equazione differenziale
$$\ddot{x} + 16x = -\cos(t)$$
e che al tempo 0 lo spostamento valga $x(0) = 0$ e la velocità valga $\dot{x}(0) = -1$

   a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo
   b. Esiste l'ampiezza massima dell'oscillazione? Come si puó determinare?
   c. Si può decidere, senza calcolare la soluzione generale dell'equazione, se l'oscillazione è limitata?

15. Supponiamo che un'oscillazione forzata sia determinata dalla seguente equazione differenziale
$$\ddot{x} + 9x = -\sin(3\,t)$$

   a. Determinare lo spostamento in funzione del tempo e della posizione e velocità al tempo 0
   b. Determinare, se esiste, l'ampiezza massima dell'oscillazione
   c. Si può decidere, senza calcolare la soluzione generale dell'equazione, se l'oscillazione è limitata?

16. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine
$$y'' + 4y' + y = \sin(3x)\,. \tag{13}$$

   a. Determinare la soluzione generale dell' equazione omogenea associata.
   b. Determinare la soluzione generale dell' equazione non omogenea, cercando una soluzione particolare del tipo $y = A\cos(3x) + B\sin(3x)$.
   c. Determinare la soluzione dell'equazione non omogenea con condizioni iniziali
   $$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$$
   d. Per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la soluzione delle equazioni (omogenea e non omogenea) con condizioni iniziali
   $$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$
   tende a $-\infty$ per $x \mapsto +\infty$?