Analisi Matematica I – 12cfu – 13 Giugno 2012
primo appello A.A. 2011/12

1. Enunciare il Teorema di Cauchy per le EDO lineari del 3^o ordine e rispondere alle seguenti domande sulla EDO
$$y''' + y' = x \tag{1}$$
   (a) Verificare che le funzioni costanti e le funzioni $y = \cos(x)$ e $y = \sin(x)$ sono soluzioni dell'equazione omogenea associata.
   (b) Determinare per quali valori dei parametri $A, B \in \mathbb{R}$ la funzione $y = Ax^2 + Bx$ è soluzione dell'equazione (1).
   (c) Dopo aver illustrato la struttura delle soluzioni delle EDO del 3^o ordine, determinare la soluzione generale dell'equazione (1).
   (d) Determinare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y''' + y' = x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2 \end{cases}$
   e determinarne l'approssimazione di McLaurin di ordine 4.

2. Rispondere alle seguenti domande sulla funzione di due variabili definita da
$$f(x, y) = xy + ye^{xy}\sin(y) - \cos(2x)$$
   (a) Determinarne il polinomio di McLaurin di ordine 4.
   (b) Si può dedurre dal punto precedente se l'origine è un punto di estremo locale?
   (c) Se $P \equiv (0, \pi)$ l'insieme di livello $f(x, y) = f(P)$ è localmente una curva di livello? Se si determinarne la retta tangente.

3. Considerare la funzione definita da $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$.
   (a) Spiegare come si può usare il teorema degli zeri per funzioni di due variabili per determinare il dominio di f e disegnarlo. Inoltre disegnare l'insieme in cui la funzione è positiva e quello in cui è negativa. Giustificare il fatto che l'immagine di f è un intervallo e determinarlo.
   (b) Dopo aver verificato che $Q \equiv (\sqrt{2}, -1, 0)$ appartiene al grafico di f, scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente in Q a tale grafico.
   (c) Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ definito dalla disequazione
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\,.$$
   Discutere l'esistenza di massimi e minimi globali di f ristretto a D. In particolare determinare l'esistenza di massimi e minimi locali di f vincolati alla frontiera di D.