Domande a risposta aperta della prova del 11/07/12

July 26, 2012

---

1 Domanda 5

1.0.1: Punti 4

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ e sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x, y) = f(\sin(x)) + f(\cos(y))$. Calcolare la matrice Hessiana di F.

R 1.0.1.1: Motivare la risposta

1.0.2: Punti 4

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f' > 0$ su $\mathbb{R}$ e sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x, y) = f(xy)$. Verificare che l'origine è un punto di sella per F.

R 1.0.2.1: Motivare la risposta

1.0.3: Punti 4

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ e sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x, y) = f(\sqrt{x}) + f(\ln(y))$. Determinare il gradiente di F e il suo dominio.

R 1.0.3.1: Motivare la risposta

1.0.4: Punti 4

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ e sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x, y) = f(x^y) - f(y^x)$. Determinare il gradiente di F e il suo dominio.

R 1.0.4.1: Motivare la risposta

1.0.5: Punti 4

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x, y) = f(x/y)$. Determinare la funzione G definita da $G(x, y) = \frac{2x}{y} F_{xx} - F_{yy}$.

R 1.0.5.1: Motivare la risposta

---

2 Domanda 6

2.0.6: Punti 4

Supponiamo che e^x e e^{-x} siano soluzioni di una EDO lineare omogenea del secondo ordine. Spiegare perché $\frac{e^{2x}+3}{e^x}$ è soluzione della stessa EDO mentre e^{2x} non lo è.

R 2.0.6.1: Motivare la risposta

2.0.7: Punti 4

Sia $\phi \in C^{\infty}((0,+\infty))$, supponiamo che $\ln(x)$ sia soluzione della EDO

$$y'' + y = \phi(x).$$

Determinare l'insieme delle soluzioni della EDO, descrivendo la teoria usata.

R 2.0.7.1: Motivare la risposta

2.0.8: Punti 4

Supponiamo che e^{3x} e e^{x} siano soluzioni di una EDO lineare omogenea del secondo ordine. Spiegare perché $e^{x}(4e^{2x} - 3)$ è soluzione della stessa EDO mentre e^{2x} non lo è.

R 2.0.8.1: Motivare la risposta

2.0.9: Punti 4

Supponiamo che e^{3x} e e^{-2x} siano soluzioni di una EDO lineare omogenea del secondo ordine. Spiegare perché $\frac{e^{5x}-3}{e^{2x}}$ è soluzione della stessa EDO mentre e^{5x} non lo è.

R 2.0.9.1: Motivare la risposta

2.0.10: Punti 4
Sia $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, supponiamo che $\arctan(x)$ sia soluzione della EDO

$$y'' + 9y = \phi(x).$$

Determinare l'insieme delle soluzioni della EDO, descrivendo la teoria usata.

R 2.0.10.1: Motivare la risposta

---

3 Domanda 7

3.0.11:

1. Enunciare le condizioni necessarie del secondo ordine affinché un punto P sia di minimo locale per una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
2. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia f la funzione definita da $f(x, y) = e^{2y} + 3e^{xy} + ax^2$. Determinare l'approssimazione di McLaurin del quarto ordine di f e dedurne (quando è possibile) per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'origine è un punto di estremo locale per la funzione e per quali valori la funzione è localmente concava o convessa.

   Dedurre inoltre se l'insieme di livello $f(x, y) = f(0, 0)$ definisce, in un intorno dell'origine, una linea di livello e, in caso affermativo, determinarne la retta tangente.

Motivare le risposte
R 3.0.11.1: Motivare la risposta

3.0.12:

1. Enunciare le condizioni sufficienti del secondo ordine affinché un punto P sia di massimo locale per una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
2. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia f la funzione definita da $f(x, y) = 3e^{xy} + ax^2 - y^2$. Determinare l'approssimazione di McLaurin del quarto ordine di f e dedurne (quando è possibile) per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'origine è un punto di estremo locale per la funzione e per quali valori la funzione è localmente concava o convessa.

   Dedurre inoltre se l'insieme di livello $f(x, y) = f(0, 0)$ definisce, in un intorno dell'origine, una linea di livello e, in caso affermativo, determinarne la retta tangente.

Motivare le risposte
R 3.0.12.1: Motivare la risposta

3.0.13:

Data la funzione definita da $f(x, y, z) = (x + 3)^{yz}$

1. Determinarne il dominio.

2. Determinarne il polinomio di McLaurin di ordine 4.
3. Dedurre dal punto precedente (se possibile) se l'origine è un punto di estremo locale
4. Dedurre dal punto secondo se l'origine è un punto in cui all'insieme di livello $f(x,y,z) = 1$ si puó applicare il teorema della funzione implicita.
5. Determinare in quali punti all'insieme di livello $f(x,y,z) = 1$ non si puó applicare il teorema della funzione implicita.
6. Studiare, per quanto possibile, l'insieme di livello $f(x,y,z) = 1$. In particolare dire se è aperto, chiuso, convesso, connesso per archi, limitato, compatto.

Motivare le risposte
R 3.0.13.1: Motivare la risposta

---

4 Domanda 8

4.0.14: Sia f la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-2y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

1. f è continua su $\mathbb{R}$?
2. f ha le derivate parziali in $(0,0)$?
3. f è differenziabile in $(0,0)$?

Motivare le risposte
R 4.0.14.1: Motivare la risposta

4.0.15: Sia f la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

1. f è continua su $\mathbb{R}$?
2. f ha le derivate parziali in $(0,0)$?
3. f è differenziabile in $(0,0)$?

Motivare le risposte
R 4.0.15.1: Motivare la risposta

4.0.16: Sia f la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+2y^2x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

1. f è continua su $\mathbb{R}$?
2. f ha le derivate parziali in $(0,0)$?
3. f è differenziabile in $(0,0)$?

Motivare le risposte
R 4.0.16.1: Motivare la risposta