Analisi I - ICI - 2013

Gianna Stefani

January 16, 2013

Contents

1 Domanda 5

1.1 ApertaTaylorA5 (Q/R:)

1.1.1: Punti 4

Usando l'approssimazione di McLaurin binomiale, calcolare la prima derivata non nulla della funzione $f(x) = \sqrt[4]{(2+x^7)^3}$ e stabilire se l'origine è un punto di massimo o minimo locale per f, oppure è un flesso a tangente orizzontale. Illustrare il risultato con un disegno.

R 1.1.1.1: Motivare la risposta.

1.1.2: Punti 4

Usando l'approssimazione di McLaurin binomiale, calcolare la prima derivata non nulla della funzione $f(x) = \sqrt[5]{(3+x^8)^2}$ e stabilire se l'origine è un punto di massimo o minimo locale per f, oppure è un flesso a tangente orizzontale. Illustrare il risultato con un disegno.

R 1.1.2.1: Motivare la risposta.

1.1.3: Punti 4

Usando l'approssimazione di McLaurin binomiale, calcolare la prima derivata non nulla della funzione $f(x) = \sqrt[4]{(7-x^5)^5}$ e stabilire se l'origine è un punto di massimo o minimo locale per f, oppure è un flesso a tangente orizzontale. Illustrare il risultato con un disegno.

R 1.1.3.1: Motivare la risposta.

1.1.4: Punti 4

Usando l'approssimazione di McLaurin binomiale, calcolare la prima derivata non nulla della funzione $f(x) = \sqrt[7]{(4-x^4)^2}$ e stabilire se l'origine è un punto di massimo o minimo locale per f, oppure è un flesso a tangente orizzontale. Illustrare il risultato con un disegno.

R 1.1.4.1: Motivare la risposta.

---

2 Domanda 6

2.1 AperteFniIIA5 (Q/R:)

2.1.1: Punti 4

Enunciare il teorema degli zeri per una funzione di due variabili.

R 2.1.1.1: Motivare la risposta

2.1.2: Punti 4

Sia $f(x, y) = \cos(xy)\ln(3 - x)$, verificare che l'equazione $f(x, y) = \ln(3)$ definisce, in un intorno dell'origine, una funzione implicita del tipo $x = \psi(y)$ e determinare l'approssimazione del primo ordine di ψ.

R 2.1.2.1: Motivare la risposta

2.1.3: Punti 4

Sia A aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f \in C^\infty(A)$. Enunciare le condizioni necessarie del secondo ordine affinché un punto $P \equiv (x_0, y_0) \in A$ sia un punto di massimo relativo per f.

R 2.1.3.1: Motivare la risposta

2.1.4: Punti 4

Sia A aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f \in C^\infty(A)$. Enunciare le condizioni sufficienti del secondo ordine affinché un punto $P \equiv (x_0, y_0) \in A$ sia un punto di massimo relativo per f.

R 2.1.4.1: Motivare la risposta

2.1.5: Punti 4

Sia $f(x,y) = \cos(xy)\ln(3-y)$, verificare che l'equazione $f(x,y) = \ln(3)$ definisce, in un intorno dell'origine, una funzione implicita del tipo $y = \phi(x)$ e determinare l'approssimazione del primo ordine di ϕ.

R 2.1.5.1: Motivare la risposta

2.1.6: Punti 4

Sia A aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f \in C^\infty(A)$. Enunciare le condizioni necessarie del secondo ordine affinché un punto $P \equiv (x_0, y_0) \in A$ sia un punto di minimo relativo per f.

R 2.1.6.1: Motivare la risposta

2.1.7: Punti 4

Sia A aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f \in C^\infty(A)$. Enunciare le condizioni sufficienti del secondo ordine affinché un punto $P \equiv (x_0, y_0) \in A$ sia un punto di minimo relativo per f.

R 2.1.7.1: Motivare la risposta

2.1.8: Punti 4

due funzioni Siano f e g due funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Enunciare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange affinché $P \equiv (x_0, y_0)$ sia un punto di minimo per f vincolata a $g(x,y) = 0$.

3 Esercizi

3.1 esercizioEdoA5 (Q/R:)

3.1.1: Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) = 0.$$

1. Determinare tutte e sole le soluzioni dell'equazione;
2. individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale, il cui grafico, $x = \phi(t)$, è tangente alla retta $x = -t$, nell'origine;
3. individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni dell'equazione $x = \phi(t)$ che passano per l'origine e tali che $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$. Disegnarne il grafico.

Motivare adeguatamente la risposta

R 3.1.1.1: Motivare la risposta

3.1.2: Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) - 4\dot{x}(t) + 5x(t) = 0.$$

1. Determinare tutte e sole le soluzioni dell'equazione;
2. individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale, il cui grafico, $x = \phi(t)$, è tangente alla retta $x = 2t$, nell'origine;
3. individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni dell'equazione $x = \phi(t)$ che passano per l'origine e tali che $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$. Disegnarne il grafico.

Motivare adeguatamente la risposta

R 3.1.2.1: Motivare la risposta

3.1.3: Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0.$$

1. Determinare tutte e sole le soluzioni dell'equazione;
2. individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale, il cui grafico, $x = \phi(t)$, è tangente alla retta $x = t$, nell'origine;
3. individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni dell'equazione $x = \phi(t)$ che passano per l'origine e tali che $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$. Disegnarne il grafico.

Motivare adeguatamente la risposta

R 3.1.3.1: Motivare la risposta

3.1.4: Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x}(t) - 4x(t) = 0.$$

1. Determinare tutte e sole le soluzioni dell'equazione;
2. individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale, il cui grafico, $x = \phi(t)$, è tangente alla retta $x = 2t$, nell'origine;
3. individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni dell'equazione $x = \phi(t)$ che passano per l'origine e tali che $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$. Disegnarne il grafico.

Motivare adeguatamente la risposta

R 3.1.4.1: Motivare la risposta

3.2 eserciziFniIntIeII (Q/R:)

3.2.1: Disegnare il grafico delle funzioni $f(x) = e^{-x^2}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Inoltre rispondere alle seguenti domande sulla funzione di due variabili $G(x,y) = \int_0^{x^2+y^2} f(t)\,dt$.

1. Scrivere G mediante F.
2. Determinarare le derivate parziali prime e seconde di G, usando la regola della derivazione di funzioni composte.
3. Determinare gradiente e matrice Hessiana di G nell'origine e dedurne se l'origine è un punto di estremo libero locale o un punto di sella per G.
4. Dopo aver giustificato che G vincolata all'ellisse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ammette massimo e minimo, determinare i punti di massimo e minimo vincolato usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
5. **Facoltativo**. Dopo aver verificato che le circonferenze centrate nell'origine sono linee di livello per G, si dimostri, usando il grafico di F, che G ha minimo globale, non ha massimo e è limitata.

Motivare adeguatamente le risposte

R 3.2.1.1: Motivare la risposta

3.2.2: Disegnare il grafico delle funzioni $f(x) = e^{x^2}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Inoltre rispondere alle seguenti domande sulla funzione di due variabili $G(x,y) = \int_0^{x^2+y^2} f(t)\,dt$.

1. Scrivere G mediante F.
2. Determinarare le derivate parziali prime e seconde di G, usando la regola della derivazione di funzioni composte.
3. Determinare gradiente e matrice Hessiana di G nell'origine e dedurne se l'origine è un estremo libero locale o un punto di sella per G.
4. Dopo aver giustificato che G vincolata all'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ammette massimo e minimo, determinare i punti di massimo e minimo vincolato usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
5. **Facoltativo**. Dopo aver verificato che le circonferenze centrate nell'origine sono linee di livello per G, si dimostri, usando il grafico di F, che G ha minimo globale, non ha massimo e il suo estremo superiore è $+\infty$.

Motivare adeguatamente le risposte

R 3.2.2.1: Motivare la risposta

3.2.3: Disegnare il grafico delle funzioni $f(x) = -e^{-x^2}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Inoltre rispondere alle seguenti domande sulla funzione di due variabili $G(x,y) = \int_0^{xy} f(t)\,dt$.

1. Scrivere G mediante F.
2. Determinarare le derivate parziali prime e seconde di G, usando la regola della derivazione di funzioni composte.
3. Determinare gradiente e matrice Hessiana di G nell'origine e dedurne se l'origine è un punto di estremo libero locale o un punto di sella per G.
4. Dopo aver giustificato che G vincolata all'ellisse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ammette massimo e minimo, determinare i punti di massimo e minimo vincolato usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

5. **Facoltativo**. Dopo aver verificato che le iperboli equilatere centrate nell'origine sono linee di livello per G, si dimostri, usando il grafico di F, che l'immagine di G è un intervallo limitato e aperto.

Motivare adeguatamente le risposte

R 3.2.3.1: Motivare la risposta

3.2.4: Disegnare il grafico delle funzioni $f(x) = -e^{x^2}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Inoltre rispondere alle seguenti domande sulla funzione di due variabili $G(x,y) = \int_0^{xy} f(t)\,dt$.

1. Scrivere G mediante F.
2. Determinarare le derivate parziali prime e seconde di G, usando la regola della derivazione di funzioni composte.
3. Determinare gradiente e matrice Hessiana di G nell'origine e dedurne se l'origine è un estremo libero locale o un punto di sella per G.
4. Dopo aver giustificato che G vincolata all'ellisse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ammette massimo e minimo, determinare i punti di massimo e minimo vincolato usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
5. **Facoltativo**. Dopo aver verificato che le iperboli equilatere centrate nell'origine sono linee di livello per G, si dimostri, usando il grafico di F, che l'immagine di G è $\mathbb{R}$.

Motivare adeguatamente le risposte

R 3.2.4.1: Motivare la risposta