B044 – Analisi Matematica I –2012-2013 – Appello Straordinario – 14 maggio 2013

Matricola:

Nome:

n. **23**

Domanda 1) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo per una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$. Usarlo per disegnare il grafico della funzione definita da $F(x) = \int_0^x \frac{t^2-4}{1+t^4}\,dt$, senza calcolare l'integrale. In particolare:

1. Determinare il dominio.
2. Determinare l'esistenza di eventuali asintoti orizzontali e verticali usando il criterio di equivalenza asintotica per gli integrali impropri.
3. Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali massimi e minimi locali e globali.
4. Non importa determinare concavità e convessità.

Inoltre rispondere alle seguenti domande sulla funzione di due variabili $G(x,y) = \int_0^{3x-y} f(t)\,dt$.

1. Determinare la funzione di due variabili α, per cui sia $G = F \circ \alpha$.
2. Enunciare la regola della derivazione di funzioni composte $h = f \circ g$, nel caso in cui f sia una funzione di una variabile e g una funzione di due variabili. Applicare la regola per determinare il gradiente di G e il suo dominio.
3. Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di G in $Q \equiv (0,0,G(0,0))$
4. Enunciare la condizione affinché l'equazione $G(x,y) = G(x_0,y_0)$ definisca, nell'intorno di $P_0 \equiv (x_0,y_0)$, una funzione implicita del tipo $y = \phi(x)$. Determinare tale insieme e disegnarlo. Inoltre, per ognuno dei punti P_0 in cui la funzione implicita è definita, scrivere l'equazione della tangente in P_0 al grafico $y = \phi(x)$.
5. Dopo aver giustificato che G vincolata alla circonferenza di equazione $x^2+y^2 = 1/100$ ammette massimo e minimo, determinare i punti di massimo e minimo vincolati.

Motivare adeguatamente le risposte

Domanda 2)

1. Si enunci il teorema di Cauchy (o ai valori iniziali) per le equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine.
2. Si enunci il teorema sulla struttura dell'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine.
3. Usare il precedente punto per determinare tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$
4. Individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni della precedente equazione differenziale, il cui grafico è tangente alla retta $y = -3x$, nell'origine.
5. Individuare, se esistono, tutte e sole le soluzioni $\phi(x)$ della precedente equazione differenziale che passano per l'origine e tali che $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$.

Motivare adeguatamente la risposta