ESERCIZI A RISPOSTA APERTA DELLA PROVA INTERCORSO DEL 31/1/2012

Esercizio 5. L'esercizio riguarda il Teorema a pg.66 del registro delle lezioni (lezioni del 14/12/11), vedi anche il teorema 7.23 a pg.204 del testo di riferimento. Un esempio:

Completare le ipotesi del seguente risultato.

Ipotesi 1.
f è continua in $(1,4)$
Ipotesi 2. *f è derivabile su* $(1,2)\cup(2,4)$
Ipotesi 3.
$\lim_{x\to 2} f'(x) = +\infty$ oppure $-\infty$

Tesi. *f ha un flesso a tangente verticale in $x_0 = 2$*

Esercizio 6. Seguono due esempi, gli altri si trattano in maniera analoga. Si ricorda che ci possono essere ulteriori risposte equivalenti.

(1) *Scrivere la funzione definita da $f(x) = |4x-8|+3$ come funzione definita a tratti.*

$$f(x) = \begin{cases} 4x-8+3 = 4x-5 & x \geq 2 \\ 8-4x+3 = 11-4x & x \leq 2 \end{cases}$$

Inoltre, usando la definizione, stabilire se la funzione è derivabile in $x_0 = -2$.

$$f(x) - f(-2) = \text{ (in un intorno di } -2) = 11-4x-19 = -4(x+2)$$

quindi la funzione è derivabile $x_0 = -2$ e $f'(-2) = -4$

oppure

$$\lim_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{11-4x-19}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{-4(x+2)}{x+2} = -4$$

quindi la funzione è derivabile $x_0 = -2$ e $f'(-2) = -4$

(2) *Scrivere la funzione definita da $f(x) = \frac{3}{|x-2|+3}$ come funzione definita a tratti.*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2+3} = \frac{3}{x+1} & x \geq 2 \\ \frac{3}{2-x+3} = \frac{3}{5-x} & x \leq 2 \end{cases}$$

Inoltre, usando la definizione, stabilire se la funzione è derivabile in $x_0 = 2$.

$$f(x) - f(2) = \frac{3}{|x-2|+3} - 1 = \frac{-|x-2|}{|x-2|+3} = (x-2)\frac{-\operatorname{sign}(x-2)}{|x-2|+3}$$

quindi la funzione non è derivabile in $x_0 = 2$, poiché la funzione definita da

$$x \mapsto \frac{-\operatorname{sign}(x-2)}{|x-2|+3}$$

è discontinua in $x_0 = 2$.

oppure

$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^\pm} \frac{-|x-2|}{(x-2)} \frac{1}{|x-2|+3} = -1/3 \lim_{x\to 2^\pm} \frac{|x-2|}{x-2} = \mp 1/3$$

quindi la funzione non è derivabile $x_0 = 2$, poiché il limite destro del rapporto incrementale è diverso dal limite sinistro.

Esercizio 8

(1) *Al variare del parametro reale positivo β calcolare, se esiste,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(|x|^\beta\right)}{1-\cos(x)-\frac{\beta}{2}x^2}$$

Il numeratore è equivalente a $|x|^\beta$, per $x \to 0$.
Il denominatore è equivalente a $\big((1-\beta)x^2/2 - x^4/4!\big)$, per $x \to 0$. Quindi:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \dfrac{-4!\,|x|}{x^4} = -\infty & \text{se } \beta = 1 \\ \dfrac{2}{1-\beta}\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|^\beta}{x^2} & \text{se } \beta \neq 1 \end{cases}$$

Nesegue che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta \in (0,1) \\ -\infty & \text{se } \beta \in [1,2) \\ -2 & \text{se } \beta = 2 \\ 0 & \text{se } \beta > 2 \end{cases}$$

(2) *Al variare del parametro reale positivo β calcolare, se esiste,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(|x|^\beta\right) - \frac{3}{2}\beta\,|x|^{\frac{2}{3}}}{1-\cos(x)}$$

Il numeratore è equivalente a $|x|^\beta - |x|^{3\beta}/3! - (3/2)\beta|x|^{2/3}$, per $x \to 0$.
Il denominatore è equivalente a $x^2/2$, per $x \to 0$. Quindi:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \dfrac{2\,|x|^\beta}{x^2} = +\infty & \text{se } \beta \in (0, 2/3) \\ \lim_{x\to 0} \dfrac{-2\,|x|^2/3!}{x^2} = -1/3 & \text{se } \beta = 2/3 \\ \lim_{x\to 0} \dfrac{-3\beta\,|x|^{2/3}}{x^2} = -\infty & \text{se } \beta > 2/3 \end{cases}$$

(3) *Al variare del parametro reale positivo b calcolare, se esiste,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(x)) - 1 - \sin(\cos(x)-1)}{\sqrt{1+x} - b^x}$$

Il numeratore è uguale a $\cos(x+o(x)) - 1 - \sin(-x^2/2 + o(x)) = o(x^2)$.
Il denominatore è equivalente a $1 + x/2 - x^2/8 - \big(1 + x\ln(b) + x^2(\ln(b))^2/2\big)$, per $x \to 0$. Quindi:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \dfrac{o(x^2)}{-x^2/4} = 0 & \text{se } \ln(b) = 1/2 \iff b = \sqrt{e} \\ \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{(1/2-\ln(b))x} = 0 & \text{se } b \neq \sqrt{e} \end{cases}$$

Cioè il limite è uguale a 0 per ogni reale positivo b

(4) *Al variare del parametro reale positivo b calcolare, se esiste,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp((\sin(x))^2) - 1 - \sin(\exp(x^2)-1)}{\sqrt{1+x} - b^x}$$

La soluzione è completamente analoga alla precedente.

Esercizio 7. Si danno di seguito alcune indicazioni sulla soluzione, i dettagli (inclusi i grafici) si lasciano allo studente.

(1) *A partire dal grafico di $x \mapsto e^x$, che deve ritenersi noto, si disegnino i grafici di*

$$f_1 : x \mapsto |e^x - 1| \quad f_2 : x \mapsto |e^x - 2| \quad f_3 : x \mapsto \max\{|e^x - 1|\,,\, |e^x - 2|\}.$$

Le funzioni f_1, f_2 si disegnano facilmente con traslazioni verticali e simmetria rispetto all'asse x delle parti negative. Poichè la soluzione di $f_1(x) = f_2(x)$ coincide con la soluzione di $e^x - 1 = -e^x + 2$, è data da $x = \ln(3/2)$; quindi f_3 coincide con f_2 su $(-\infty, \ln(3/2)]$ e con f_1 su $[\ln(3/2), +\infty)$

Della funzione f_3 si determini l'insieme in cui è continua, quello in cui è derivabile, concavità, convessità ed eventuali asintoti orizzontali e verticali.

Dalle proprietà delle funzioni elementari e dal grafico, si vede facilmente che la funzione è $C^0(\mathbb{R})$ e presenta un punto angoloso in $x = \ln(3/2)$, unico punto in cui non è derivabile. Inoltre è concava su $(-\infty, \ln(3/2)]$ e convessa su $[\ln(3/2), +\infty)$. Essendo continua su $\mathbb{R}$ non ha asintoti verticali ed ha un solo asintoto orizzontale (sinistro) $y = 2$.

Si consideri inoltre, al variare del parametro reale α, la funzione f_α definita a tratti da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f_3(x) & x \leq 0, \\ x^\alpha & x > 0 \end{cases}$$

su $(-\infty, 0]$ la funzione coincide con $2 - e^x$, su $(0, +\infty)$ coincide con le funzioni potenza ad esponente reale, il cui grafico deve essere noto e si può consultare su qualsiasi libro di Analisi I

e, dopo averla disegnata, si determinino:

(a) *il dominio e l'immagine di f_α;*
il dominio è $\mathbb{R}$ per ogni α, la funzione è non negativa; inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} f_\alpha(x) = f_\alpha(0) = 1, \qquad \lim_{x\to -\infty} f_\alpha(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = \begin{cases} +\infty & \alpha < 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha > 0 \end{cases}, \qquad \lim_{x\to +\infty} f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha > 0 \end{cases},$$

quindi l'immagine è $(0, +\infty)$ per $\alpha \neq 0$ e $[1, 2)$ per $\alpha = 0$

(b) *tutti e soli i valori del parametro α per cui f_α è limitata;*
dall'immagine risulta che l'unico valore per cui la funzione è limitata è $\alpha = 0$.

(c) *gli eventuali asintoti orizzontali e verticali;*
$y = 2$ è asintoto orizzontale (sinistro) per ogni α;
per $\alpha > 0$ non ci sono altri asintoti;
per $\alpha = 0$ la funzione ha anche l' asintoto orizzontale (destro) $y = 1$, coincidente con la funzione su $\mathbb{R}^+$;
per $\alpha < 0$ la funzione ha anche l'asintoto verticale (destro) $x = 0$ e l'asintoto orizzontale (destro) $y = 0$

(d) *gli eventuali punti di discontinuità di f_α;*
per $\alpha = 0$ la funzione è continua su $\mathbb{R}$, per $\alpha \neq 0$ è discontinua in 0

(e) *gli eventuali punti di non derivabilità di f_α;*
la funzione è $C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e non derivabile in 0 per ogni α, infatti, in $x = 0$, è discontinua per ogni $\alpha \neq 0$ e presenta un punto angoloso per $\alpha = 0$

(f) *gli eventuali punti di estremo relativo e assoluto;*
la funzione è decrescente su $(-\infty, 0]$ per ogni per ogni α;
decrescente su $(0, +\infty)$ per $\alpha < 0$;
costante su $(0, +\infty)$ per $\alpha = 0$;
crescente su $(0, +\infty)$ per $\alpha > 0$.
per $\alpha \neq 0$ non ci sono punti di massimo o minimo relativo o assoluto, mentre per $\alpha = 0$, tutti i punti della semiretta $[0, +\infty)$ sono punti di minimo assoluto e non ci sono punti massimo relativo o assoluto.

(g) *gli eventuali punti di flesso*
non ci sono punti di flesso.

(2) *Si disegnino i grafici di*

$$f_1 : x \mapsto x^2 - 2x - 3 \quad f_2 : x \mapsto x + 1 \quad f_3 : x \mapsto \min\{x^2 - 2x - 3\,,\, x + 1\}.$$

Il grafico della funzione f_1 è una parabola con vertice in $(1, -4)$ e il grafico della funzione f_2 è una retta; i due grafici si incontrano nei punti $(-1, 0)$ e $(4, 5)$. Si vede quindi facilmente che f_3 coincide con f_2 su $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$ e con f_1 su $[-1, 4]$

Della funzione f_3 si determini l'insieme in cui è continua, quello in cui è derivabile, concavità, convessità ed eventuali asintoti orizzontali e verticali.

Dal grafico, si vede facilmente che la funzione è $C^0(\mathbb{R})$ e presenta due punti angolosi in $x = -1$ e $x = 4$, unici punti in cui non è derivabile. Inoltre è una retta su $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$ ed è convessa su $[-1, 4]$. Essendo continua su $\mathbb{R}$ non ha asintoti verticali ed, essendo una retta obliqua definitivamente per $x \to \pm\infty$, non ha asintoti orizzontali.

Si consideri inoltre, al variare del parametro reale α, la funzione f_α definita a tratti da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f_3(x) & x \le 1, \\ (x-1)^\alpha & x > 1 \end{cases}$$

su $(-\infty, 1]$ la funzione è già stata studiata, su $(1, +\infty)$ il suo grafico coincide con la traslazione a destra dei grafici delle funzioni potenza ad esponente reale, studiati precedentemente

e, dopo averla disegnata, si determinino:

(a) *il dominio e l'immagine di f_α;*
il dominio è $\mathbb{R}$ per ogni α; la funzione è positiva per $x \ge 1$ e non positiva per $x \le 1$; inoltre

$$\lim_{x \to 1^-} f_\alpha(x) = f_\alpha(-1) = -4, \qquad \lim_{x \to -\infty} f_\alpha(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f_\alpha(x) = \begin{cases} +\infty & \alpha < 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha > 0 \end{cases}, \qquad \lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha > 0 \end{cases},$$

quindi l'immagine è $\mathbb{R}$ per $\alpha \ne 0$ e $(-\infty, 0] \cup \{1\}$ per $\alpha = 0$

(b) *tutti e soli i valori del parametro α per cui f_α è limitata;*
la funzione è illimitata per ogni α

(c) *gli eventuali asintoti orizzontali e verticali;*
per $\alpha > 0$ non ci sono asintoti orizzontali o verticali;
per $\alpha = 0$ la funzione ha l' asintoto orizzontale destro $y = 1$, coincidente con la funzione su $(1, +\infty)$;
per $\alpha < 0$ la funzione ha l'asintoto verticale destro $x = 1$ e l'asintoto orizzontale destro $y = 0$

(d) *gli eventuali punti di discontinuità di f_α;*
per ogni α la funzione è discontinua in 1

(e) *gli eventuali punti di non derivabilità di f_α;*
per ogni α la funzione è non derivabile in 1 (perché discontinua) e in -1 dove ha un punto angoloso

(f) *gli eventuali punti di estremo relativo e assoluto;*
per ogni α, $x = -1$ è un punto di massimo relativo e $x = 1$ è un punto di minimo relativo;
non ci sono altri punti di massimo o minimo per $\alpha \ne 0$, mentre per $\alpha = 0$ tutta la semiretta $(1, +\infty)$ è costituita di punti di massimo assoluto.

(g) *gli eventuali punti di flesso*
Non ci sono punti di flesso.

(3) Per ragioni tipografiche si risponde a ciascuna domanda globalmente, in una prova scritta conviene studiare prima la funzione sulla semiretta negativa, farne il grafico, poi studiare la funzione sulla semiretta destra ed infine rispondere ai quesiti.
Al variare del parametro reale α, si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{3x}\right) & x < 0, \\ x^\alpha\,(x+1) & x > 0 \end{cases}$$

e si discutano:

(a) *la possibilità di estendere f_α con continuità su tutto $\mathbb{R}$;*
la funzione è $C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per ogni α, inoltre

$$\lim_{x\to 0^-} f_\alpha(x) = \lim_{x\to 0^-} \exp(1/(3x)) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha < 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha > 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è estendibile con continuità a 0 (e quindi a $\mathbb{R}$) col valore 0, per $\alpha > 0$.

(b) *l'esistenza di asintoti;*
i precedenti limiti ci dicono che l'asintoto verticale $x = 0$ esiste per $\alpha < 0$; inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp(1/(3x)) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+1} = \begin{cases} +\infty & \alpha > -1 \\ 1 & \alpha = -1 \\ 0 & \alpha < -1 \end{cases}$$

quindi per ogni α si ha l'asintoto orizzontale (sinistro) $y = 1$;
per $\alpha < -1$ si hanno anche l'asintoto verticale (destro) $x = 0$ e l'asintoto orizzontale (destro) $y = 0$;
per $\alpha = -1$ si hanno anche l'asintoto verticale (destro) $x = 0$ e l'asintoto orizzontale (destro) $y = 1$;
per $\alpha \in (-1, 0)$ si ha anche l'asintoto verticale (destro) $x = 0$;
per $\alpha \geq 0$ non ci sono altri asitoti orizzontali o verticali

(c) *gli estremi relativi e i punti di estremo relativo;*
la funzione è positiva sul suo dominio, inoltre

$$D(\exp(1/(3x)) = -\exp(1/(3x)/(x^2), \quad D(x^{\alpha+1} + x^\alpha) = (\alpha+1)x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}$$

quindi la funzione è decrescente sulla semiretta negativa.
sulla semiretta positiva la derivata si annulla solo per $\alpha \in (-1, 0)$ nel punto $x = -\alpha/(\alpha+1)$, che (per il valore dei limiti) risulta un punto di minimo relativo (non assoluto);
per $\alpha \in (-\infty, -1]$ la funzione è decrescente;
per $\alpha \in [0, +\infty)$ la funzione è crescente;
ne segue che la funzione ha un minimo relativo solo per $\alpha \in (-1, 0)$; per $\alpha > 0$ si può considerare la funzione estesa, tale funzione ha un minimo assoluto che vale 0 in $x = 0$

(d) *l'estremo superiore ed inferiore di f_α e si dica se sono massimo e minimo di f_α;*
l'estremo inferiore è 0 per ogni α, risulta un minimo solo per la funzione estesa quando $\alpha > 0$; l'estremo superiore è $+\infty$ per ogni α, che ovviamente non è un massimo

(e) *l'immagine di f_α;*
l'immagine è $(0, +\infty)$ per $\alpha \neq 0, -1$, è $(0, +\infty) \setminus \{1\}$ per $\alpha = 0, -1$; per $\alpha > 0$, la funzione estesa ha per immagine $[0, +\infty)$

(f) *si tracci il grafico di f_α.*
la funzione può essere estesa per continuità a sinistra su $(-\infty, 0]$; tale funzione ha tangente orizzontale in $x = 0$, è convessa in un intorno sinistro di $x = 0$ e concava definitivamente per $x \to -\infty$, quindi deve avere un flesso, che il calcolo della derivata seconda pone in $x = -6$;
sulla semiretta positiva il punto $(1, 2)$ appartiene al grafico per ogni α; la funzione è equivalente a x^α per $x \to 0^+$ ed a $x^{\alpha+1}$ per $x \to +\infty$; vanno considerati i casi:
$\alpha < -1$, dove la funzione è decrescente e convessa;
$\alpha = -1$, dove il grafico della funzione è la traslazione verticale dell'iperbole equilatera;
$\alpha \in (-1, 0)$, dove la funzione è definitivamente concava per $x \to +\infty$;
$\alpha = 0$, dove il grafico è una retta;
$\alpha \in (0, 1)$, dove la funzione estesa di f_α ha in $x = 0$ un punto singolare con tangente destra $x = 0$ e tangente sinistra $y = 0$; la funzione ha un flesso ed è definitivamente convessa per $x \to +\infty$;
$\alpha = 1$, dove la funzione ha in $x = 0$ un punto singolare con tangente destra $y = x$ e tangente sinistra $y = 0$ e sulla semiretta positiva rappresenta una parabola;

$\alpha > 1$, dove la funzione estesa di f_α è derivabile in $x = 0$ con tangente orizzontale ed è convessa su $[-6, +\infty)$

(4) L'esercizio è completamente analogo al precedente.
Al variare del parametro reale α, si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & x < 0, \\ \frac{x^\alpha}{x+1} & x > 0 \end{cases}$$

e si discutano:

(a) *la possibilità di estendere f_α con continuità su tutto $\mathbb{R}$;*
per $\alpha > 0$

(b) *l'esistenza di asintoti;*
per $\alpha > 1$ solo l'asintoto orizzontale sinistro $y = 1$; per $\alpha = 1$ l'asintoto orizzontale destro e sinistro $y = 1$; per $\alpha \in [0, 1)$ l'asintoto orizzontale sinistro $y = 1$ e l'asintoto orizzontale destro $y = 0$; per $\alpha < 0$ l'asintoto orizzontale sinistro $y = 1$ e l'asintoto verticale destro $x = 0$;

(c) *gli estremi relativi e i punti di estremo relativo;*
per $\alpha > 0$ la funzione estesa ha un minimo globale in $x = 0$; per $\alpha \in (0, 1)$ ha anche un massimo locale in $x = \alpha/(1 - \alpha)$

(d) *l'estremo superiore ed inferiore di f_α e si dica se sono massimo e minimo di f_α;*
l'estremo superiore è $+\infty$ per $\alpha < 0$ e $\alpha > 1$; è 1 per $\alpha \in [0, 1]$ (non è massimo)
l'estremo inferiore è 0 per ogni α, risulta un minimo per la funzione estesa per $\alpha > 0$;

(e) *l'immagine di f_α;*
vedi sopra

(f) *si tracci il grafico di f_α.*
il grafico sulla semiretta negativa è studiato nel precedente esercizio;
sulla semiretta positiva il punto $(1, 1/2)$ appartiene al grafico per ogni α, inoltre nei punti precedenti ci sono tutti gli elementi per tracciare il grafico sulla semiretta positiva